Homogenní rovnice

Uvažujme rovnici

$$y' = f(x, y), \tag{4}$$

kde

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)\,, \qquad \forall \lambda \neq 0\,.$$

Tato rovnice se nazývá *homogenní rovnice 1. řádu*. Ukážeme, že tuto rovnici lze převést substitucí na rovnici se separovanými proměnnými.

Postup řešení. Pozorujeme, že (pro $x \neq 0$) je

$$f(x, y) = f(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}) = f(1, \frac{y}{x})\,,$$

tj. pravá strana rovnice závisí pouze na y/x.

Definujeme tedy $z(x) = y(x)/x$, takže

$$\begin{aligned} y(x) &= xz(x)\,, \\ y'(x) &= xz'(x) + z(x)\,. \end{aligned}$$

Rovnice přechází na $xz' + z = f(x, xz) = f(1, z)$, tj.

$$z' = \frac{1}{x}\big[f(1, z) - z\big], \tag{5}$$

což je rovnice se *separovanými proměnnými* (pro neznámou funkci $z = z(x)$). Standarním postupem najdeme $z(x)$ a tedy $y(x) = xz(x)$.

Poznámka. Uvědomme si, že je-li z řešení rovnice (5) na nějakém podintervalu $(0, +\infty)$, nebo $(-\infty, 0)$, pak je $y := z \cdot x$ řešením rovnice (4) na stejném intervalu. Platí i opačná implikace. Protože jsme pro účely výpočtu řešení museli vyloučit případ $x = 0$, je v konkrétních případech potřeba na závěr ověřit, zda nalezná řešení můžeme prodloužit až do počátku.

Příklad 3. Řešme rovnici $x^2y' + xy = x^2 + y^2$.

Řešení. Pro $x \neq 0$ rovnici přepíšeme do tvaru

$$y' = \frac{-xy + x^2 + y^2}{x^2}\,,$$

jedná se tedy o homogenní rovnici 1. řádu. Substituce $y(x) = xz(x)$ dává

$$\begin{aligned} xz' + z &= -z + 1 + z^2\,, \\ xz' &= (z - 1)^2\,. \end{aligned}$$

To je rovnice se separovanými proměnnými. Zjevně $z \equiv 1$ je řešení, tj. $y(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ je řešení původní rovnice.

Hledejme řešení za podmínky $z \neq 1$, $x \neq 0$. Tedy

$$-\frac{z'}{(z-1)^2} = -\frac{1}{x}$$

a integrací dostáváme

$$\frac{1}{z-1} = c - \ln|x|\,.$$

Pro $I = (0, +\infty)$, $J = (1, +\infty)$ zobrazuje funkce na levé straně interval J na $(0, +\infty)$. Tedy $c - \ln x \in (0, +\infty)$ a zároveň $x \in (0, +\infty)$, což nám dává $x \in (0, e^c)$. Pro $I = (-\infty, 0)$ dostáváme $x \in (-e^c, 0)$. Na těchto intervalech je řešení dáno předpisem

$$z(x) = \frac{c+1-\ln|x|}{c-\ln|x|}\,, \qquad y(x) = x\frac{c+1-\ln|x|}{c-\ln|x|}\,. \tag{6}$$

Podobně pro $J = (1, +\infty)$ a $I = (0, +\infty)$, resp. $I = (-\infty, 0)$, zobrazuje funkce G interval J na $(-\infty, 0)$. Máme tedy $c - \ln|x| \in (-\infty, 0)$ a zároveň $x > 0$, resp. $x < 0$. Odtud dostáváme řešení na intervalech $(-\infty, -e^c)$, resp. $(e^c, +\infty)$ definovaná opět předpisem (6).

Jsou tato řešení maximální? Protože limity řešení v bodech $\pm e^c$ zprava a zleva nejsou vlastní, jistě řešení nepůjdou prodloužit tímto směrem. Zbývá vyšetřit prodloužení do počátku. Protože

$$\lim_{x\to 0} y(x) = 0$$

a po dodefinování $y(0) := 0$ je

$$y'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{y(x)-y(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{c+1-\ln|x|}{c-\ln|x|} = 1\,,$$

snadno dosazením ověříme, že v bodě $x = 0$ je rovnice splněna. Dodefinovaná funkce je tedy řešením na celém intervalu $(-e^c, e^c)$.

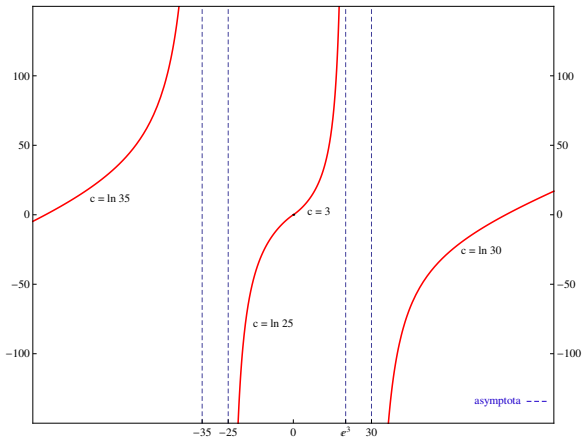
Všimněte si, že všechna tato řešení procházejí počátkem a mají zde stejnou derivaci. Můžeme je tedy vzájemně napojovat. Takovéto singulární chování je pro homogenní rovnice typické!

Všechna maximální řešení rovnice tedy jsou:

$$y(x) = \begin{cases} x\frac{c+1-\ln|x|}{c-\ln|x|}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x\frac{d+1-\ln|x|}{d-\ln|x|}, & x < 0, \end{cases}$$

$c, d \in (-\infty, +\infty]$ (kde pro $c = \infty$ máme na mysli limitní případ $y(x) = x \cdot 1$) a

$$y(x) = x\frac{c + 1 - \ln|x|}{c - \ln|x|}, x \in (-\infty, -e^c), \text{ resp. } x \in (e^c, +\infty).$$



Příklad 4. Řešte rovnici $y' = \frac{y-x}{y+x}$.

Řešení. Substituce $y = xz$ vede na

$$xz' + z = \frac{z-1}{z+1}$$
$$z' = -\frac{1}{x} \cdot \frac{z^2+1}{z+1}$$

Vidíme, že neexistují stacionární řešení a řešení budeme hledat na intervalech $I_1 = (-\infty, 0)$, $I_2 = (0, +\infty)$ a pro z: $J_1 = (-\infty, -1)$, $J_2 = (-1, +\infty)$. Po vydělení $g(z)$ a zintegrování máme

$$\ln\sqrt{z^2+1} + \operatorname{arctg} z = c - \ln|x|. \tag{7}$$

Funkci na levé straně rovnice si označme G. Tuto funkci neumíme zinvertovat (z se nám z rovnice nepovede vyjádřit), nicméně víme, že funkce G je pro $z < -1$ klesající a pro $z > -1$ rostoucí a zobrazuje tedy $(-\infty, -1)$ prostě na $(\ln\sqrt{2} - \pi/4, +\infty)$ a interval $(-1, +\infty)$ prostě tamtéž. Máme tedy

$$\ln|x| \in (-\infty, c + \pi/4 - \ln\sqrt{2})$$

nebo-li

$$x \in (0, e^{c+\pi/4-\ln\sqrt{2}}), \quad \text{resp. } x \in (-e^{c+\pi/4-\ln\sqrt{2}}, 0).$$

Řešení z je tedy dáno implicitním vztahem (7) a je definováno na jednom z výše uvedených intervalů. Konkrétněji řešení na prvním intervalu je dáno vztahem

$$\ln\sqrt{z^2+1}+\operatorname{arctg} z = c - \ln x\,, \quad \text{tj.} \quad \sqrt{z^2+1}\cdot e^{\operatorname{arctg} z} = \frac{e^c}{x}$$

a řešení na druhém intervalu

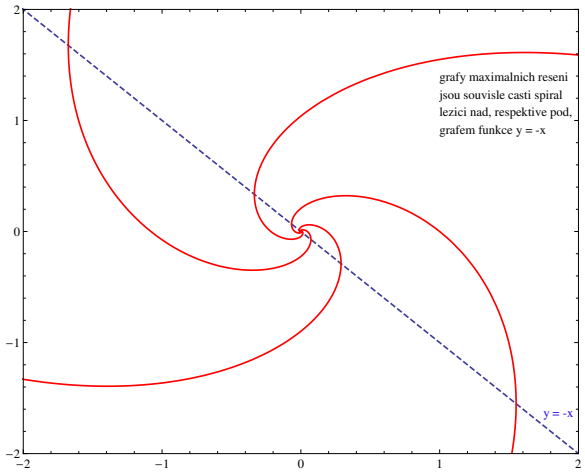
$$\ln\sqrt{z^2+1}+\operatorname{arctg} z = c - \ln(-x)\,, \quad \text{tj.} \quad \sqrt{z^2+1}\cdot e^{\operatorname{arctg} z} = -\frac{e^c}{x}$$

Dosadíme $z = y/x$, násobíme obě strany $|x|$ a máme implicitně zadaná řešení y

$$\sqrt{x^2+y^2}\cdot e^{\operatorname{arctg} y/x} = e^c\,, c \in \mathbb{R}$$

definovaná na výše uvedených intervalech.

Jsou tato řešení maximální? Pro $x \to 0+$, $y > 0$ máme $y \to e^{c_1-\pi/2}$ a $x \to 0-$, $y > 0$ máme $y \to e^{c_2+\pi/2}$, můžeme tedy napojit, pokud $c_1 = c_2 + \pi$ a získáme řešení na $(-e^{c_2+\pi+\pi/4-\ln\sqrt{2}}, e^{c_2+\pi/4-\ln\sqrt{2}})$. V krajních bodech tohoto intervalu máme $z \to -1$, tj. $y \to -x$. Po dodefinování limitou nebude tedy mít původní rovnice smysl. Nalezená řešení jsou tedy maximální. Že jsou všechna plyne opět z věty o jednoznačnosti a z toho, že každým bodem roviny prochází některé z nalezených řešení (to je vidět z následující poznámky).



Poznámka. Řešení předcházející úlohy můžeme elegantně vyjádřit v polárních souřadnicích $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ ($r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\phi = \operatorname{arctg} y/x + k\pi$). Řešením úlohy jsou části spirál $r = de^{-\phi}$. Více o substitucích v diferenciálních rovnicích se dozvíte v kapitole o nelineárních systémech.

Příklad 5. Najděte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y' = e^{y/x} + y/x.$$

Řešení. Substitucí $y = x \cdot z$ převedeme na

$$e^{-z} z' = 1/x.$$

Pro $x \in (-\infty, 0)$, resp. $(0, +\infty)$ a $z \in \mathbb{R}$ integrací dostaneme

$$-e^{-z} = \ln|x| + c.$$

Funkce na levé straně zobrazuje interval $\mathbb{R}$ na interval $(-\infty, 0)$, tj.

$$\ln|x| + c < 0.$$

Odtud

$$|x| < e^{-c},$$

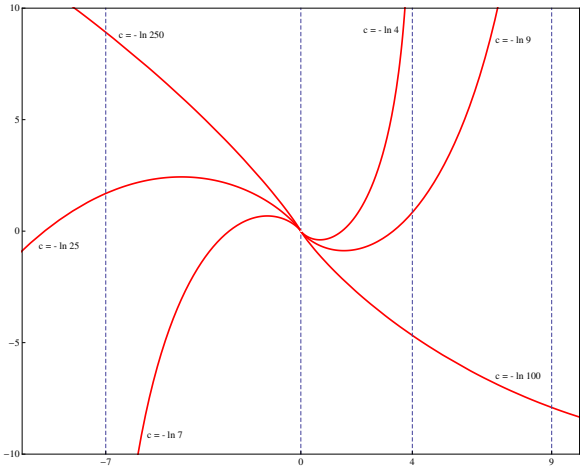
tedy

$$x \in (0, e^{-c}), \quad \text{resp.} \quad x \in (-e^{-c}, 0).$$

Ze vztahu mezi x a z dostáváme

$$z(x) = -\ln(-\ln|x| - c)$$

a

$$y(x) = -x \ln(-\ln|x| - c)$$

na výše uvedených intervalech. Tato řešení jsou maximální, protože pro $x = 0$ nemá původní rovnice smysl a v bodech $\pm e^{-c}$ má řešení nevlastní limitu. Řešení jsou všechna, protože vyplní celou množinu $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0\}$.