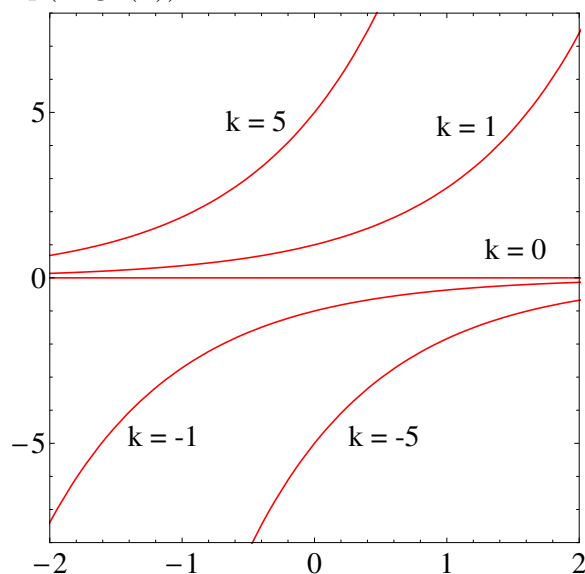
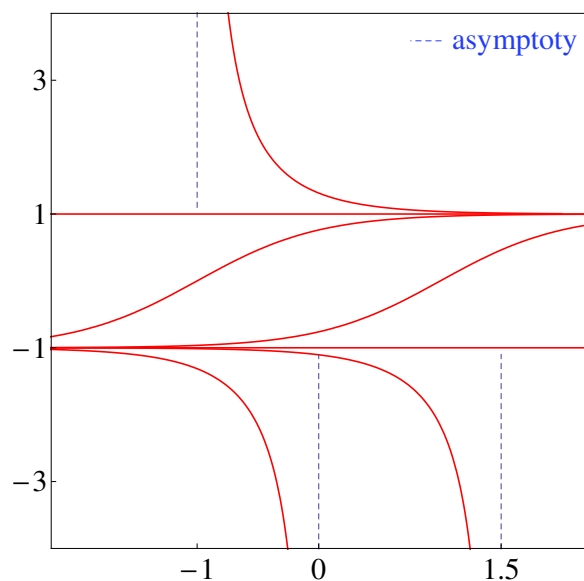


Řešení

1) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = 0$ na $\mathbb{R}$. Řešíme na intervalech $y \in (-\infty; 0)$, $y \in (0; +\infty)$. Po integraci: $\operatorname{sgn}(y) \ln |y| = x + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách pro $y < 0$: $y = -\exp(-(x + c))$ a pro $y > 0$: $y = \exp(x + c)$. Závěr: $y(x) = k \exp(x \operatorname{sgn}(k))$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$.

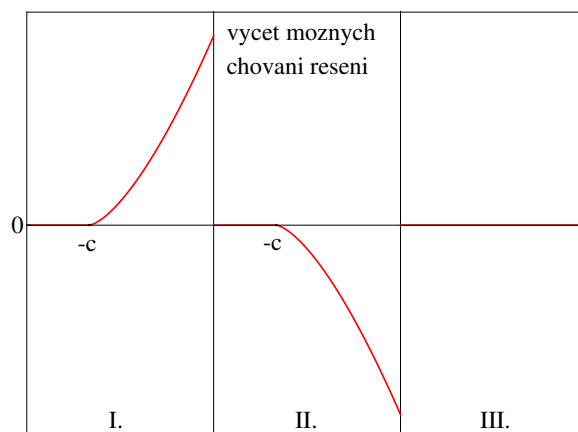


2) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = \pm 1$ na $\mathbb{R}$. Řešíme na intervalech $y \in (-\infty; -1)$, $y \in (-1; 1)$, $y \in (1; +\infty)$. Po integraci $\frac{1}{2} \ln\left(\left|\frac{y+1}{y-1}\right|\right) = x + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách pro $y \in (-\infty; -1)$ a pro $y \in (1; +\infty)$ máme $y = \operatorname{cotgh}(x + c)$ pro $y \in (-1; 1)$ $y = \operatorname{tgh}(x + c)$. Závěr: $y(x) = \pm 1$, $x \in \mathbb{R}$; $y(x) = \operatorname{tgh}(x + c)$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$; $y(x) = \operatorname{cotgh}(x + c)$, $x \in (-\infty; -c)$ nebo $x \in (-c; +\infty)$, $c \in \mathbb{R}$.

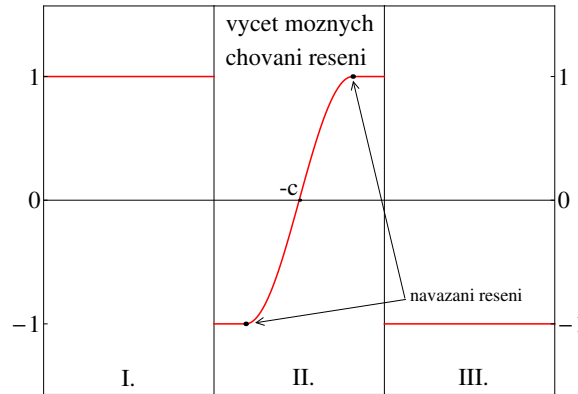


3) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = 0$ na $\mathbb{R}$. Řešíme na intervalech $y \in (-\infty; 0)$, $y \in (0; +\infty)$. Po integraci: $\sqrt[3]{y^2} = x + c$, $c \in \mathbb{R}$, tj. $x > -c$. Po úpravách pro $y < 0$: $y = \sqrt{(x+c)^3}$ a pro $y > 0$: $y = -\sqrt{(x+c)^3}$. Lze nalepit v $-c$. Závěr:

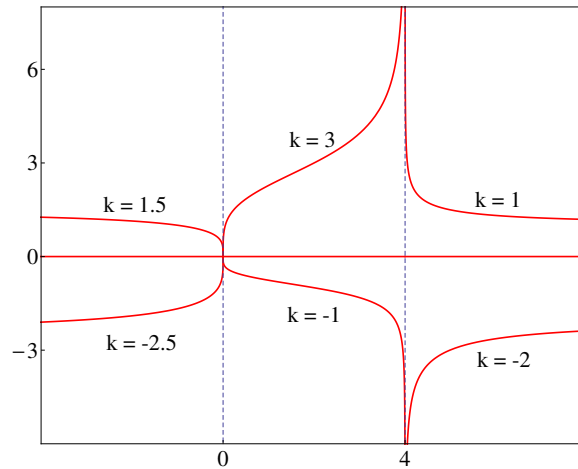
$$y(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; -c), \\ \pm \sqrt{(x+c)^3} & x \in [-c; +\infty), \end{cases} \quad c \in \mathbb{R}^*$$



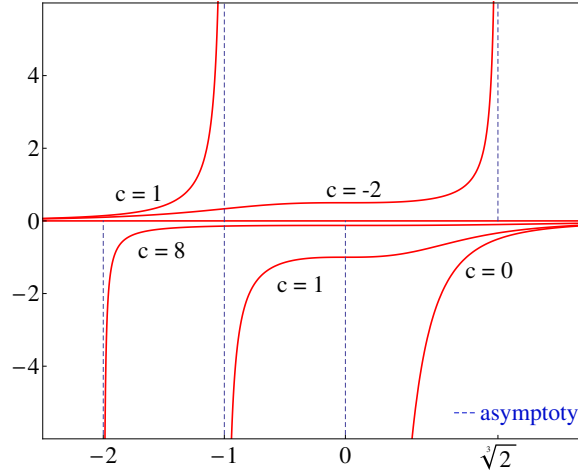
4) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in [-1; 1]$. Stacionární řešení $y = \pm 1$ na $\mathbb{R}$. Pro $y \in (-1; 1)$ řešíme rovnici $\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = 1$, po integraci $\arcsin y = x + c$, $c \in \mathbb{R}$. Odtud $y = \sin(x + c)$, $x \in (-\frac{\pi}{2} - c; \frac{\pi}{2} - c)$. Řešení lze napojovat ve všech bodech, kde $y = -1$ nebo $y = 1$. Každé maximální řešení rovnice je určeno vzorcem $y(x) = \sin(x+c)$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2} - c; \frac{\pi}{2} - c)$, $y(x) = -1$ na $(-\infty; -\frac{\pi}{2} - c]$ a $y(x) = 1$ na $[\frac{\pi}{2} - c; +\infty)$ kde c je reálné číslo.



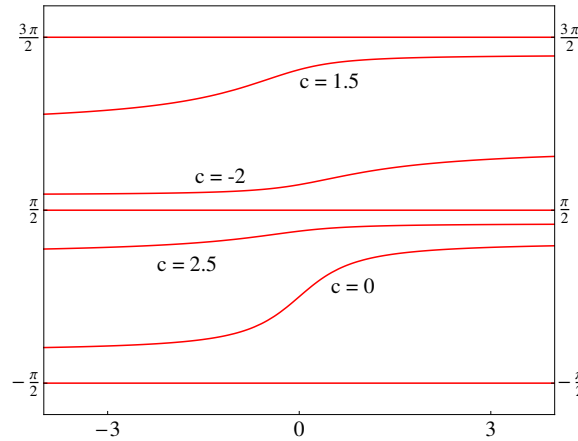
5) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = 0$ na $\mathbb{R}$. Řešíme na intervalech $x \in (-\infty; 0)$, $x \in (0; 4)$, $x \in (4; +\infty)$, $y \in (-\infty; 0)$ nebo $y \in (0; +\infty)$. Po integraci: $\ln(|y|) = \frac{1}{4} \ln(|\frac{x}{x-4}|) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách pro $y < 0$: $y = -k\sqrt[4]{|\frac{x}{x-4}|}$, $k > 0$ a pro $y > 0$: $y = k\sqrt[4]{|\frac{x}{x-4}|}$, $k > 0$. Závěr: $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$; $y(x) = \pm k\sqrt[4]{|\frac{x}{x-4}|}$, $x \in (-\infty; 0)$ nebo $x \in (0; 4)$ nebo $x \in (4; +\infty)$, $k \in \mathbb{R}^+$.



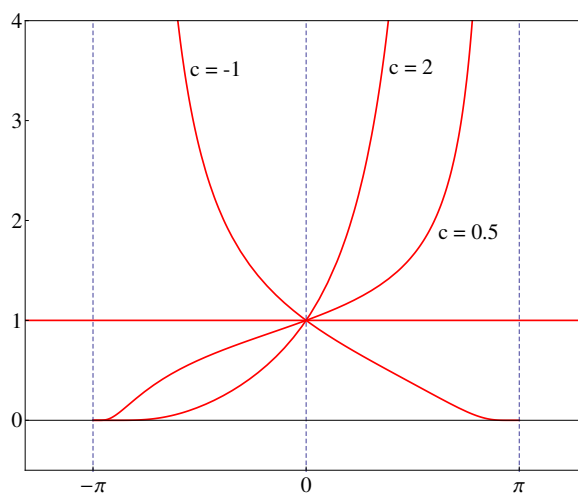
6) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = 0$ na $\mathbb{R}$. Řešíme na intervalech $y \in (-\infty; 0)$ nebo $y \in (0; +\infty)$. Po integraci: $-\frac{1}{y} = x^3 + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách $y = \frac{-1}{x^3+c}$. Závěr: $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$; $y(x) = \frac{-1}{x^3+c}$, $x \in (-\infty; -\sqrt[3]{c})$ nebo $x \in (-\sqrt[3]{c}; +\infty)$, $c \in \mathbb{R}$.



7) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$ na $\mathbb{R}$. Řešíme na intervalech $y \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Po integraci: $\text{tg}(y) = \text{arctg}(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách $y = \text{arctg}(\text{arctg}(x) + c) + k\pi$. Závěr: $y(x) = k\pi + \text{arctg}(c + \text{arctg}(x))$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$; $y(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.

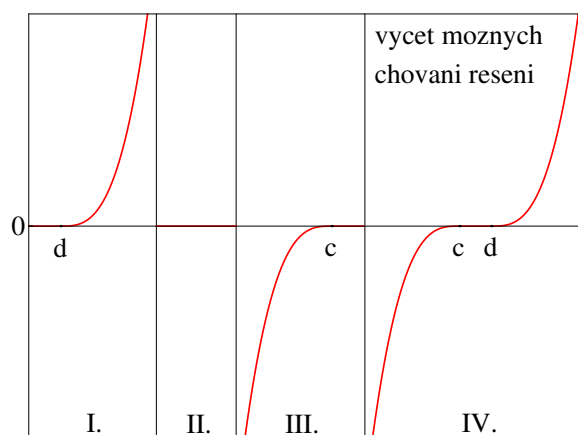


8) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = 1$ na $\mathbb{R}$. Řešíme na intervalech $x \in (k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{R}^+$. Po integraci: $\ln|\ln y| = c - \text{arctgh}(\cos x)$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách pro $y < 1$: $y = \exp(-c\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}) = \exp(-c|\text{tg}(\frac{x}{2})|)$, $c > 0$ a pro $y > 1$: $y = \exp(c\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}) = \exp(c|\text{tg}(\frac{x}{2})|)$, $c > 0$. V $x = 2k\pi$ lze nalepit. Závěr: $y(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$; $y(x) = \exp(c \cdot \text{tg}(\frac{x}{2}))$, $x \in ((2k-1)\pi; (2k+1)\pi)$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

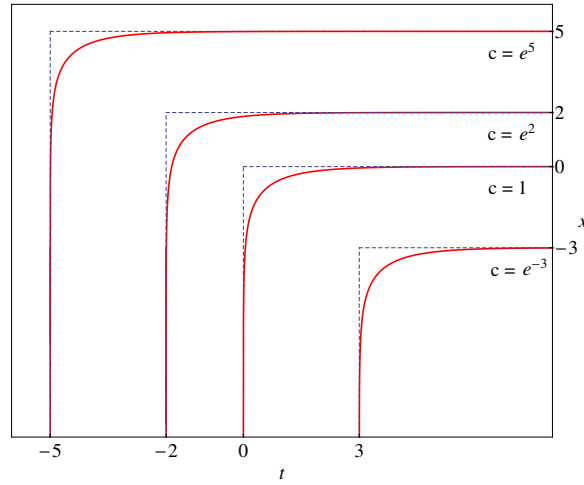


9) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = 0$ na $\mathbb{R}$. Řešíme na intervalech $y \in (-\infty; 0)$ nebo $y \in (0; +\infty)$. Po integraci: $\sqrt[3]{y} = x + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách $y = (\frac{x+c}{3})^3$ pro $x \in (-\infty; -c)$ nebo $x \in (-c; +\infty)$. Závěr:

$$y(x) = \begin{cases} (\frac{x+c}{3})^3; & x \in (-\infty; -c] \\ 0; & x \in (-c; -d) \\ (\frac{x+d}{3})^3; & x \in [-d; +\infty) \end{cases} \quad c, d \in \mathbb{R}^*, c \geq d$$

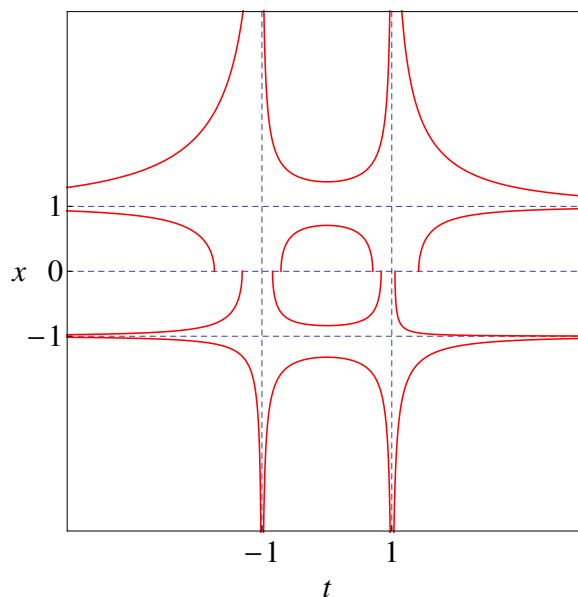


10) Má smysl pro $x, y \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = 0$ na $\mathbb{R}$. Po integraci: $\exp y = c - \exp(-x)$, $c > 0$. Po úpravách $y = \ln(c - \exp(-x))$ pro $x \in (-\ln c; +\infty)$. Závěr: $y(x) = \ln(c - \exp(-x))$; $x \in (-\ln c; +\infty)$, $c > 0$.



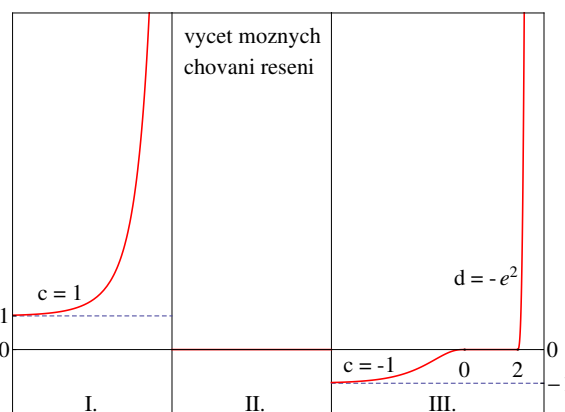
11) Má smysl pro $x \in (-\infty; -1)$ nebo $x \in (-1; 1)$ nebo $x \in (1; +\infty)$, žádná stacionární řešení. Řešíme na intervalech $y \in (-\infty; -1)$, $y \in (-1; 1)$, $y \in (1; +\infty)$. Po integraci: $\frac{1}{2} \ln |y^2 - 1| = -\frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + \frac{1}{2}c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách $y = \pm \sqrt{1 + \frac{k}{x^2 - 1}}$. Závěr: $y = \pm \sqrt{1 + \frac{k}{1 - x^2}}$ pro $x \in (-1; 1)$ a pro $y \in (-1; 1)$

$$y = \pm \sqrt{1 + \frac{k}{x^2 - 1}} \begin{cases} x \in (-\infty; -\sqrt{1 - k}) \text{ nebo } x \in (\sqrt{1 - k}; +\infty) & \text{pro } k \in (-\infty; -1] \\ x \in (-\infty; -\sqrt{1 - k}) \text{ nebo } x \in (-1; 1) \text{ nebo } x \in (\sqrt{1 - k}; +\infty) & \text{pro } k \in (-1; 0) \\ x \in (-\infty; -1) \text{ nebo } x \in (-\sqrt{1 - k}; \sqrt{1 - k}) \text{ nebo } x \in (1; +\infty) & \text{pro } k \in (0; 1) \\ x \in (-\infty; -1) \text{ nebo } x \in (1; +\infty) & \text{pro } k \in [1; +\infty) \end{cases}$$



12) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = 0$ na $\mathbb{R}$. Řešíme na intervalech $y \in (-\infty; 0)$ nebo $y \in (0; +\infty)$. Po integraci: $\sqrt[3]{y} = \exp(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách $y = (c + \exp(x))^3$. Pro $c < 0$ lze slepit v $y = 0$. Závěr: $y(x) = (\exp(x) + c)^3$, $x \in \mathbb{R}$ $c \in \mathbb{R}_0^+$,

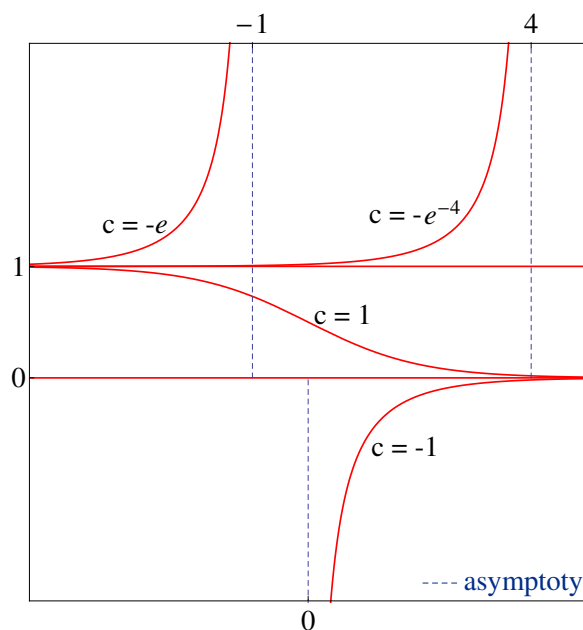
$$y(x) = \begin{cases} (\exp x + c)^3; & x \in (-\infty; \ln(-c)] \\ 0; & x \in (\ln(-c); \ln(-d)) \\ (\exp x + d)^3; & x \in [\ln(-d); +\infty) \end{cases} \quad c, d \in \mathbb{R}^- \cup \{-\infty\}, \quad c > d$$



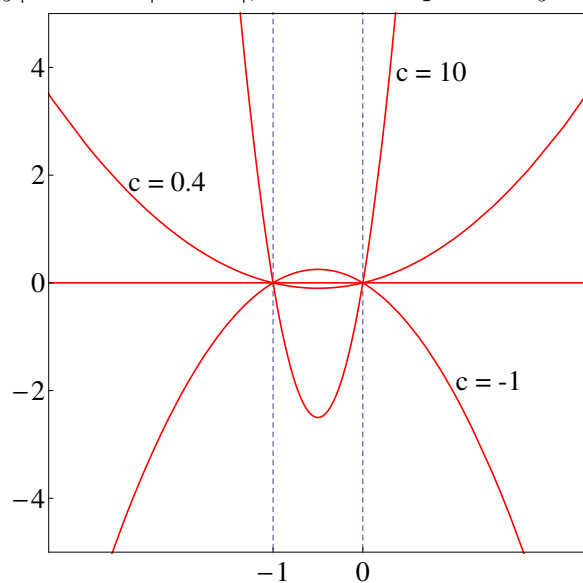
13) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = 0$ na $\mathbb{R}$ a $y = 1$ na $\mathbb{R}$. Řešíme na intervalech $y \in (-\infty; 0)$, $y \in (0; 1)$, $y \in (1; +\infty)$. Po integraci:

$\ln \left| \frac{y-1}{y} \right| = x + c, c \in \mathbb{R}$. Po úpravách $y = \frac{1}{1 - c \exp x}$. Závěr: $y(x) = 0, x \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = \frac{1}{1 + c \exp x}, \begin{cases} x \in \mathbb{R} \text{ pro } c \in (-\infty; 0] \\ x \in (-\infty; -\ln c) \text{ nebo } x \in (-\ln c; +\infty) \text{ pro } c \in (0; +\infty) \end{cases}$$

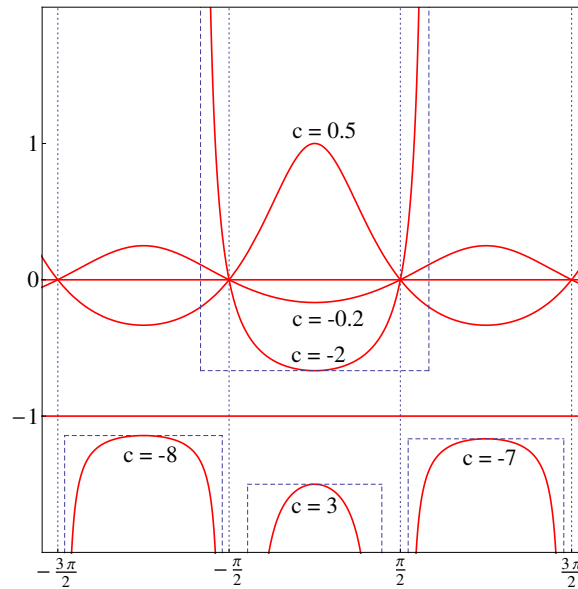


14) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = 0$ na $\mathbb{R}$. Řešíme na intervalech $x \in (-\infty; -1)$, $x \in (-1; 0)$, $x \in (1; +\infty)$, $y \in (-\infty; 0)$, $y \in (0; +\infty)$. Po integraci: $\ln |y| = c + \ln |x^2 + x|, c \in \mathbb{R}$. Po úpravách $y = c(x^2 + x)$. Závěr:



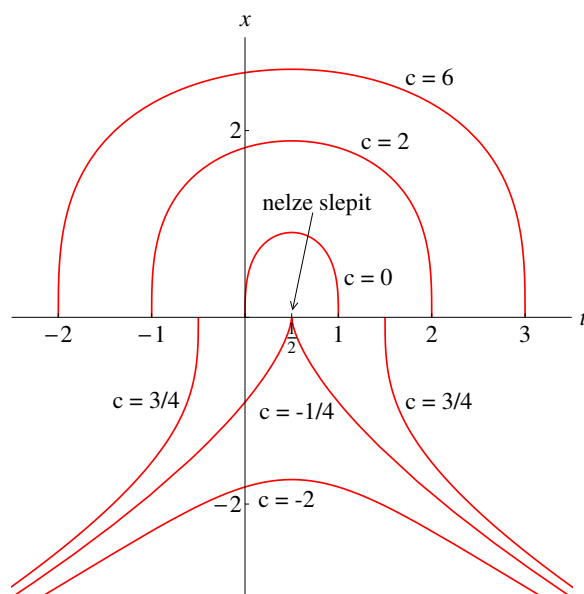
15) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = 0$ a $y = -1$ na $\mathbb{R}$. Řešíme na intervalech $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, $y \in (-\infty; -1)$, $y \in (-1; 0)$, $y \in (0; +\infty)$. Po integraci: $\ln|\frac{y}{y+1}| = \ln|\cos x| + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách $y = \frac{c \cdot \cos x}{1 - c \cdot \cos x}$. Závěr: $y(x) = -1$, $x \in \mathbb{R}$ a

$$y(x) = \frac{c \cdot \cos(x)}{1 - c \cdot \cos(x)} \begin{cases} x \in (2k\pi - \arccos(\frac{1}{c}); 2k\pi + \arccos(\frac{1}{c})), & k \in \mathbb{Z} \\ \text{pro } c \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \\ x \in (2k\pi + \arccos(\frac{1}{c}); 2(k+1)\pi - \arccos(\frac{1}{c})), & \\ \text{pro } c \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty), & k \in \mathbb{Z} \\ x \in \mathbb{R} \text{ pro } c \in (-1; 1) \end{cases}$$

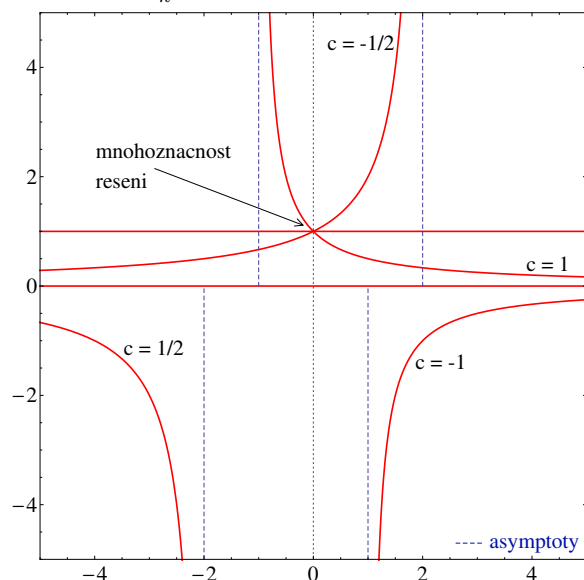


16) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Řešíme na intervalech $x \in (-\infty; 0)$, $x \in (0; +\infty)$, $y \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Po integraci: $\operatorname{tg}(y) = \frac{1}{8} \operatorname{arctg}(\frac{x}{2}) - \frac{1}{4x} + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách $y = \operatorname{arctg}(\frac{1}{8} \operatorname{arctg}(\frac{x}{2}) - \frac{1}{4x} + c)$. Závěr: $y(x) = k\pi + \operatorname{arctg}(\frac{1}{8} \operatorname{arctg}(\frac{x}{2}) - \frac{1}{4x} + c)$, $x \in (-\infty; 0)$ nebo $x \in (0; +\infty)$, $c \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ a $y(x) = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.

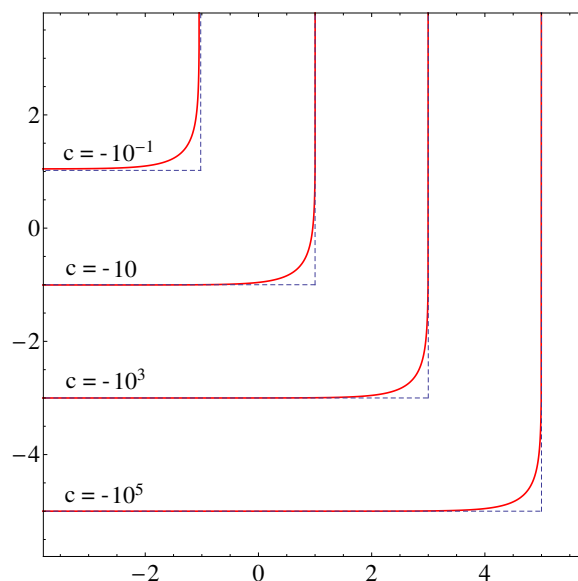
17) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, žádná stacionární řešení. Řešíme na intervalech $y \in (-\infty; 0)$, $y \in (0; +\infty)$. Po integraci: $\frac{1}{3}y^3 = x - x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách $y = \sqrt[3]{3(x - x^2 + c)}$. Závěr: $y(x) = \sqrt[3]{3(x - x^2 + c)}$ na intervalech: Pokud $c \in (-\infty; -\frac{1}{4})$, pak $x \in \mathbb{R}$. Pokud $c = -\frac{1}{4}$, $x \in (-\infty; \frac{1}{2})$ nebo $x \in (\frac{1}{2}; +\infty)$. A pokud $c \in (-\frac{1}{4}; +\infty)$, pak $x \in (-\infty; \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + c})$ nebo $x \in (\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + c}; \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + c})$ nebo $x \in (\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + c}; +\infty)$.



18) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = 0$ a $y = 1$ na $\mathbb{R}$. Řešíme na intervalech $x \in (-\infty; 0)$, $x \in (0; +\infty)$, $y \in (-\infty; 0)$, $y \in (0; 1)$, $y \in (1; +\infty)$. Po integraci: $\ln \left| \frac{y-1}{y} \right| = \ln |x| + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách pro $y < 0$ a $y > 1$: $y = \frac{1}{1+k|x|}$, $k > 0$ a pro $0 < y < 1$: $y = \frac{1}{1-k|x|}$, $k > 0$. Závěr: $y(x) = \frac{1}{1+kx}$, $x \in (-\infty; -\frac{1}{k})$ nebo $x \in (-\frac{1}{k}; +\infty)$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $y(x) = 0$, $y(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

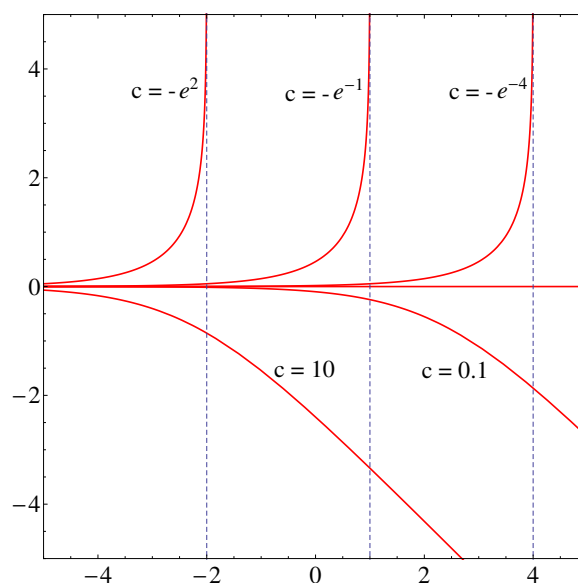


19) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, žádná stacionární řešení. Po integraci: $-\frac{10^{-y}}{\ln 10} = \frac{10^x}{\ln 10} + \frac{c}{\ln 10}$, $c < 0$. Po úpravách $y = -\log_{10}(-10^x - c)$. Závěr: $y(x) = -\log_{10}(-10^x - c)$, $x \in (-\infty; \log_{10}(-c))$, $c \in \mathbb{R}^-$.



20) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = 0$ na $\mathbb{R}$. Řešíme na intervalech $y \in (-\infty; 0)$, $y \in (0; +\infty)$. Po integraci: $\ln |1 - \exp(-y)| = x + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách pro $y < 0$: $y = -\ln(k \exp x + 1)$ a pro $y > 0$: $y = -\ln(1 - k \exp x)$. Závěr:

$$y(x) = -\ln(1 + k \exp(x)), \begin{cases} x \in (-\infty; -\ln(-k)) & \text{pro } k \in (-\infty; 0) \\ x \in \mathbb{R} & \text{pro } k \in [0; +\infty) \end{cases}$$



21) Má smysl pro $x \in (-\infty; -1)$ nebo $x \in (-1; +1)$ nebo $x \in (1; +\infty)$, stacionární řešení $y = \pm 1$ na $\mathbb{R}$. Řešíme na intervalech $x \in (-1; 1)$ a $y \in$

$(-1; 1)$. Po integraci: $\arcsin(y) = \arcsin(x) + c$, $c \in (-\pi; \pi)$. Po úpravách $y = \sin(c + \arcsin(x))$. Na intervalech $x \in (-\infty; -1)$ nebo $x \in (1; +\infty)$ a $y \in (-\infty; -1)$ nebo $y \in (1; +\infty)$ získáme po integraci $\operatorname{argcosh}(x) = \operatorname{argcosh}(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Rozebereme-li jednotlivé možnosti a podíváme-li se na to, která řešení je možno jak lepit, obdržíme následující závěr:

stacionární řešení:

$$y(x) = \pm 1, \quad x \in (-\infty; -1) \text{ nebo } x \in (-1; +1) \text{ nebo } x \in (1; +\infty)$$

řešení pro $c \in (-\infty; -\pi]$:

$$y(x) = \pm \cosh(c + \operatorname{argcosh} |x|), \quad x \in (-\infty; -\cosh c) \text{ nebo } x \in (\cosh c; +\infty)$$

řešení pro $c \in (-\pi; 0]$:

$$y(x) = \pm \cosh(c + \operatorname{argcosh} |x|), \quad x \in (-\infty; -\cosh c) \text{ nebo } x \in (\cosh c; +\infty)$$

$$y(x) = \sin(c + \arcsin x), \quad x \in (-1; 1)$$

$$y(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-1; \cos c] \\ \sin(c + \arcsin x), & x \in [\cos c; 1) \end{cases}$$

řešení pro $c \in [0; \pi)$:

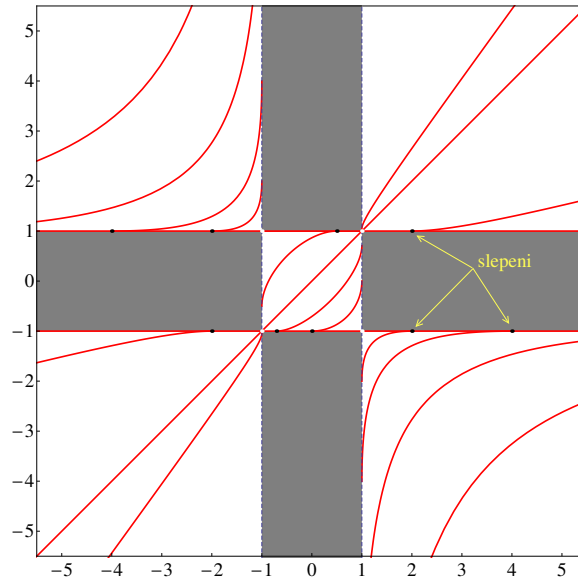
$$y(x) = \pm \cosh(c + \operatorname{argcosh} |x|), \quad x \in (-\infty; -1) \text{ nebo } x \in (1; +\infty)$$

$$y(x) = \sin(c + \arcsin x), \quad x \in (-1; 1)$$

$$y(x) = \begin{cases} \sin(c + \arcsin x), & x \in (-1; \cos c] \\ 1, & x \in [\cos c; 1) \end{cases}$$

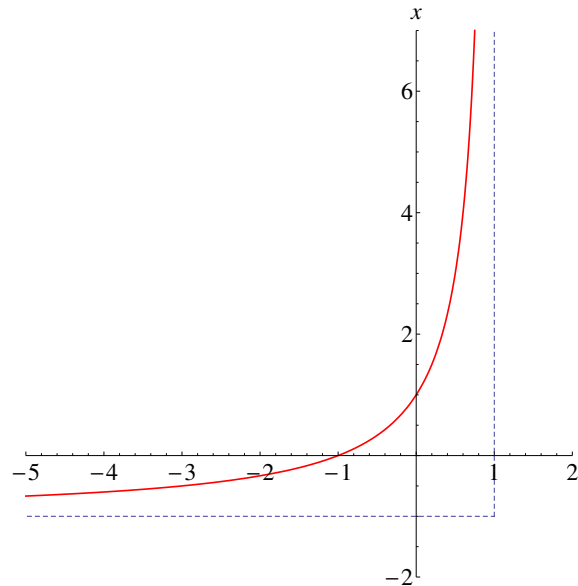
řešení pro $c \in [\pi; +\infty)$:

$$y(x) = \pm \cosh(c + \operatorname{argcosh} |x|), \quad x \in (-\infty; -1) \text{ nebo } x \in (1; +\infty)$$



22) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = 1$ na $\mathbb{R}$. Po integraci: $\ln |\ln |y|| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)} \right| + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách $y = \exp(k \sqrt{\left| \frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)} \right|})$, $k \in \mathbb{R}$. Závěr: Řešení splňující počáteční podmínku je $y(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

23) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$. Po integraci: $\arctg(y) = \arctg(x) + c$, $c = \frac{\pi}{4}$. Po úpravách $y = \exp(k \sqrt{\left| \frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)} \right|})$, $k \in \mathbb{R}$. Závěr: Řešení splňující počáteční podmínku je $y(x) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \arctg x)$, $x \in (-\infty, \operatorname{tg} \frac{\pi}{4})$.

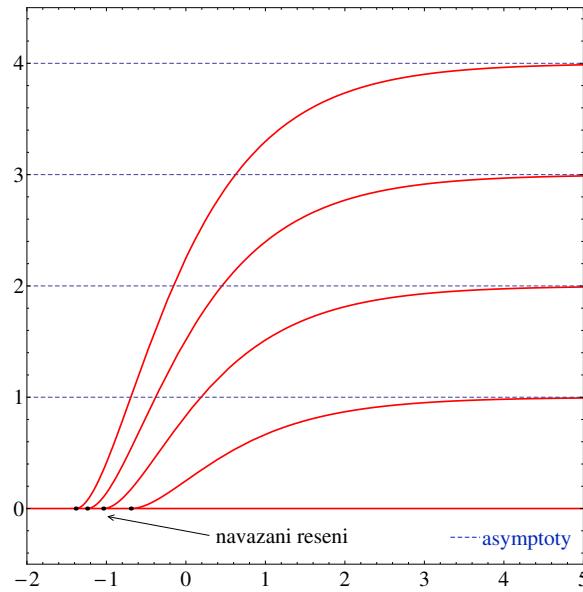


24) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in [0; +\infty)$. Stacionární řešení $y = 0$ na $\mathbb{R}$. Pro $y > 0$ řešíme rovnici $\frac{y'}{\sqrt{y}} = \exp(-x)$. Po integraci máme $2\sqrt{y} = c - \exp(-x)$,

$c \in \mathbb{R}^+$, pro $c - \exp(-x) > 0$. Po úpravě $y = \frac{(c - \exp(-x))^2}{4}$. Závěr:

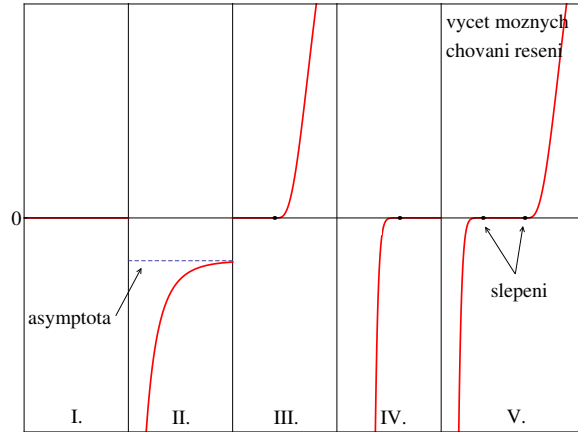
$$y(x) = 0, x \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; -\ln c] \\ \frac{1}{4}(c - \exp(-x))^2, & x \in (-\ln c; +\infty) \text{ pro } c \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

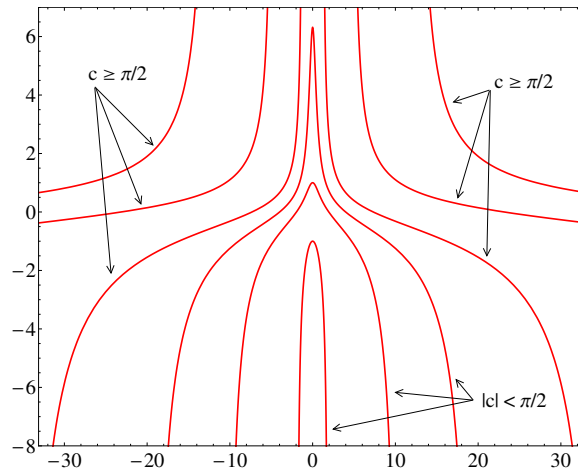


25) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, stacionární řešení $y = 0$ na $\mathbb{R}$. Řešíme na intervalech $y \in (-\infty; 0)$, $y \in (0; +\infty)$. Po integraci: $\sqrt[5]{y} = c - 4\exp(-x)$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách $y = (c - 4\exp x)^5$. Závěr: $y(x) = (c - 4\exp(x))^5$, $x \in \mathbb{R}$ pro $c \in (-\infty; 0]$ a

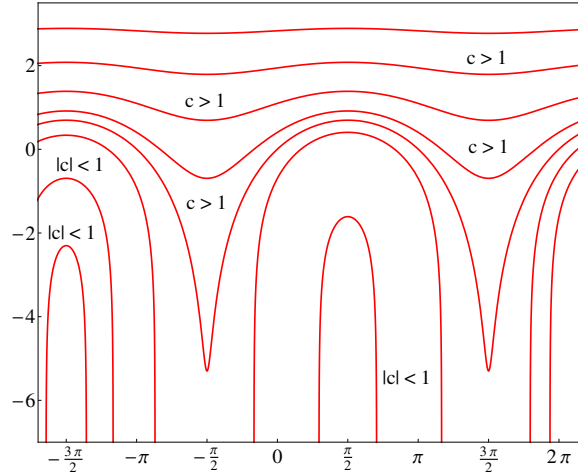
$$y(x) = \begin{cases} (c - 4\exp x)^5, & x \in (-\infty; -\ln(\frac{c}{4})) \\ 0, & x \in (-\ln(\frac{c}{4}); -\ln(\frac{d}{4})) \text{ } c, d \in [0; +\infty], \text{ } c \geq d \\ (d - 4\exp x)^5, & x \in (-\ln(\frac{d}{4}); +\infty) \end{cases}$$



26) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$. Po integraci: $\text{arctg}(y) = c - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$, $c \in (-\frac{\pi}{2}; +\infty)$. Po úpravách $y = \text{tg}(c - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1))$. Závěr: $y(x) = \text{tg}(c - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1))$ na intervalu $(-\sqrt{\exp(2c + \pi) - 1}; \sqrt{\exp(2c + \pi) - 1})$ pokud $c \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ a na intervalech $(-\sqrt{\exp(2c + \pi) - 1}; \sqrt{\exp(2c - \pi) - 1})$ nebo $(\sqrt{\exp(2c - \pi) - 1}; \sqrt{\exp(2c + \pi) - 1})$ pokud $c \in [\frac{\pi}{2}; +\infty)$.



27) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$. Po integraci: $\exp(y) = \sin(x) + c$, $c \in (-1; +\infty)$. Po úpravách $y = \ln(\sin(x) + c)$. Závěr: $y(x) = \ln(\sin(x) + c)$ na intervalech $(-\arcsin(c) + 2k\pi; -\arcsin(c) + (2k + 1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ pro $c \in (-1; 1)$, na intervalech $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ pro $c = 1$ a na $\mathbb{R}$ pro $c \in (1; +\infty)$.



28) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Stacionární řešení $y = k\pi$. Pro $y \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; k\pi)$ a pro $y \in (k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$ máme po integraci $\ln |\operatorname{tg} y| = 3 \ln |2 - e^x| + c$, $c \in \mathbb{R}$. Označme $d = (\operatorname{sgn} \operatorname{tg} y)e^c$. Potom $\operatorname{tg} y = d(2 - e^x)^3$, odtud $y = k\pi + \operatorname{arctg}(d(e^x - 2)^3)$. Závěr:

$$y(x) = k\pi + \operatorname{arctg}(d(e^x - 2)^3), \quad x \in \mathbb{R}, \quad d \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

29) Má smysl pro $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Po integraci $\operatorname{arctg} y = c - \ln |\cos x|$, $c \in (-\infty; \frac{\pi}{2})$, neboť pro $c \geq \frac{\pi}{2}$ je $c - \ln |\cos x| \geq \frac{\pi}{2}$, ale $\operatorname{arctg} y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Tedy:

$$y(x) = \operatorname{tg}(c - \ln |\cos x|).$$

Řešení je definováno na intervalech

$$\begin{cases} x \in (k\pi - \arccos e^{c-\frac{\pi}{2}}; k\pi - \arccos e^{c+\frac{\pi}{2}}), & k \in \mathbb{Z} & c \in (-\infty; -\frac{\pi}{2}] \\ x \in (k\pi + \arccos e^{c+\frac{\pi}{2}}; k\pi + \arccos e^{c-\frac{\pi}{2}}), & k \in \mathbb{Z} & c \in (-\infty; -\frac{\pi}{2}] \\ x \in (k\pi - \arccos e^{c-\frac{\pi}{2}}; k\pi + \arccos e^{c-\frac{\pi}{2}}), & k \in \mathbb{Z} & c \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

30) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$. Po integraci máme $\frac{1}{2}y^2 = c - \frac{1}{2}(x-1)^2$, $c > 0$, neboť pro $c \leq 0$ je $c - \frac{1}{2}(x-1)^2 \leq 0$, ale $\frac{1}{2} \geq 0$. Řešení $y(x) = \pm \sqrt{2c - (x-1)^2}$, $x \in (1 - \sqrt{2c}; 1 + \sqrt{2c})$ pro $c \in (0; +\infty)$.

31) Má smysl pro $x \in (-1; 1)$. Stacionární řešení $y = \pm 1$ pro $x \in (-1; 1)$. Po integraci máme rovnici $\sqrt{1 - y^2} = c - \sqrt{1 - x^2}$. Musí platit $c - \sqrt{1 - x^2} \in [0; 1]$, neboli $\sqrt{1 - x^2} \in (c - 1; c]$. Odtud $x \in (-1; -\sqrt{1 - c^2})$ nebo $x \in (\sqrt{1 - c^2}; 1)$ pro $c \in (0; 1)$ a $x \in (-\sqrt{1 - (c-1)^2}; \sqrt{1 - (c-1)^2})$ pro $c \in [1; 2)$. Pro jiné hodnoty konstanty c není splněno $c - \sqrt{1 - x^2} \in [0; 1]$. Podmínka $y \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 - (c-1)^2$ je splněna, k lepení dojde v bodě, kde $y = \pm 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 - c^2$. Řešení:

pro $c \in (0; 1)$:

$$y(x) = \begin{cases} -\sqrt{1 - (c - \sqrt{1 - x^2})^2}, & x \in (-1; -\sqrt{1 - c^2}) \\ -1, & x \in [-\sqrt{1 - c^2}; \sqrt{1 - c^2}] \\ -\sqrt{1 - (c - \sqrt{1 - x^2})^2}, & x \in (\sqrt{1 - c^2}; 1) \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - (c - \sqrt{1 - x^2})^2}, & x \in (-1; -\sqrt{1 - c^2}) \\ 1, & x \in [-\sqrt{1 - c^2}; \sqrt{1 - c^2}] \\ \sqrt{1 - (c - \sqrt{1 - x^2})^2}, & x \in (\sqrt{1 - c^2}; 1) \end{cases}$$

pro $c \in (1; 2)$:

$$y(x) = \pm \sqrt{1 - (c - \sqrt{1 - x^2})^2}, \quad x \in (-\sqrt{1 - (c - 1)^2}; \sqrt{1 - (c - 1)^2})$$

další řešení:

$$y(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1; 0] \\ \sqrt{1 - (1 - \sqrt{1 - x^2})^2}, & x \in (0; 1) \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - (1 - \sqrt{1 - x^2})^2}, & x \in (-1; 0) \\ 1, & x \in [0; 1) \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-1; 0] \\ -\sqrt{1 - (1 - \sqrt{1 - x^2})^2}, & x \in (0; 1) \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} -\sqrt{1 - (1 - \sqrt{1 - x^2})^2}, & x \in (-1; 0) \\ -1, & x \in [0; 1) \end{cases}$$

$$y(x) = \pm 1, \quad x \in (-1; 1)$$

32) Má smysl pro $x \in (-\infty; 0)$ nebo $x \in (0; +\infty)$. Po integraci a vynásobení dvěma $\sqrt{y^2 + 1} = \ln|x| + 1 - c$, $c \in \mathbb{R}$. Musí být $\ln|x| + 1 - c \geq 1$, neboli $\ln|x| \geq c$, tj. $x \in (-\infty; -e^c)$ nebo $x \in (e^c; +\infty)$. řešení na těchto intervalech: $y(x) = \pm \sqrt{(\ln|x| + 1 - c)^2 - 1}$.

33) Řešíme pro $x \in (-\infty; -1)$, $x \in (-1; 1)$, $x \in (1; +\infty)$ a $y \in \mathbb{R}$. Stacionární řešení $y = 0$ na $\mathbb{R}$. Pro $y \in (-\infty; 0)$ nebo $y \in (0; +\infty)$ řešíme rovnici $\frac{-y'}{y^2} = \frac{2x}{x^2-1}$. Po integraci $\frac{1}{y} = c + \ln|x^2 - 1|$, $c \in \mathbb{R}$. Odtud $y = \frac{1}{c + \ln|x^2-1|}$ pro x taková, že $x^2 - 1 \neq \exp(-c)$. Závěr:

$$y(x) = \frac{1}{c + \ln|x^2 - 1|},$$

Řešení je definováno pro $x \in (-\infty; -\sqrt{1+e^{-c}})$, $x \in (-\sqrt{1+e^{-c}}; -1)$, $x \in (-1; 1)$, $x \in (1; \sqrt{1+e^{-c}})$, $x \in (\sqrt{1+e^{-c}}; +\infty)$, pokud $c \in (-\infty; 0)$ a nebo pro $x \in (-\infty; -\sqrt{1+e^{-c}})$, $x \in (-\sqrt{1+e^{-c}}; -1)$, $x \in (-1; -\sqrt{1+e^{-c}})$, $x \in (-\sqrt{1+e^{-c}}; \sqrt{1+e^{-c}})$, $x \in (\sqrt{1+e^{-c}}; 1)$, $x \in (1; \sqrt{1+e^{-c}})$, $x \in (\sqrt{1+e^{-c}}; +\infty)$, pokud $c \in [0; +\infty)$

34) Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Rovnici upravíme na tvar $xy' \cos y = \sin y(\sin y - 1)$. Stacionární řešení $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, na $\mathbb{R}$ a $y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, na $\mathbb{R}$. Pro $x \neq 0$ a pro $y \in (2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $y \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi; (2k+1)\pi)$ nebo $y \in ((2k+1)\pi; (2k+2)\pi)$ máme $\frac{y' \cos y}{\sin y(\sin y - 1)} = \frac{1}{x}$. Po integraci máme $\ln|1 - \frac{1}{\sin y}| = \ln|x| + \ln c$, $c \in \mathbb{R}^+$, odtud $|1 - \frac{1}{\sin y}| = c|x|$. Pro $y \in (2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ řešení $y = \arcsin \frac{1}{1+c|x|} + 2k\pi$. Pro $y \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi; (2k+1)\pi)$ řešení $y = \pi - \arcsin \frac{1}{1+c|x|} + 2k\pi$. Pro $y \in ((2k+1)\pi; (2k+2)\pi)$ řešení $y = \arcsin \frac{1}{1-c|x|} + (2k+2)\pi$ a řešení $y = \pi - \arcsin \frac{1}{1-c|x|} + (2k+2)\pi$. Řešení lze spojit v bodě $x = 0$. Závěr:
řešení pro $y \in (2k\pi; \pi + 2k\pi)$, ve vzorcích $c, d \in \mathbb{R}$:

$$y(x) = \begin{cases} \arcsin \frac{1}{1-c|x|} + 2k\pi, & x \in (-\infty; 0] \\ \arcsin \frac{1}{1-d|x|} + 2k\pi, & x \in [0; +\infty) \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} \arcsin \frac{1}{1-c|x|} + 2k\pi, & x \in (-\infty; 0] \\ \pi - \arcsin \frac{1}{1-d|x|} + 2k\pi, & x \in [0; +\infty) \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} \pi - \arcsin \frac{1}{1-c|x|} + 2k\pi, & x \in (-\infty; 0] \\ \arcsin \frac{1}{1-d|x|} + 2k\pi, & x \in [0; +\infty) \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} \pi - \arcsin \frac{1}{1-c|x|} + 2k\pi, & x \in (-\infty; 0] \\ \pi - \arcsin \frac{1}{1-d|x|} + 2k\pi, & x \in [0; +\infty) \end{cases}$$

stacionární řešení

$$y(x) = k\pi, x \in \mathbb{R}$$

řešení pro $y \in (\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi)$, ve vzorcích $c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$y(x) = \arcsin \frac{1}{1 - c|x|} + (2k + 2)\pi, x \in (-\infty; -\frac{2}{c})$$

$$y(x) = \arcsin \frac{1}{1 - c|x|} + (2k + 2)\pi, x \in (\frac{2}{c}; +\infty)$$

$$y(x) = \pi - \arcsin \frac{1}{1 - c|x|} + (2k + 2)\pi, x \in (-\infty; -\frac{2}{c})$$

$$y(x) = \pi - \arcsin \frac{1}{1 - c|x|} + (2k + 2)\pi, x \in (\frac{2}{c}; +\infty)$$

Ve všech vzorcích platí $k \in \mathbb{Z}$.

35) Má smysl pro $x \in \mathbb{R}$, po úpravě řešíme rovnici $(b + 1)xy' = y - b$. Pro $b = -1$ řešení $y = -1$ nesplňuje počáteční podmínku. Řešíme pro $b \neq -1$. Stacionární řešení $y = b$ splní počáteční podmínku pro $b = 1$. Pro $b \neq \pm 1$ řešíme na intervalech $y \in (-\infty; b)$, $y \in (b; +\infty)$. Po integraci: $(b + 1) \ln(|y - b|) = \ln(|x|) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravách $|y - b| = k \exp\left(\frac{\ln(x)}{b+1}\right)$, kde $k = e^c$. Dosazením počáteční podmínky $y(1) = 1$ dostaneme $|1 - b| = k$. Řešení pro $y < b$: $y = b - |b - 1| \exp\left(\frac{\ln(|x|)}{b+1}\right)$ a pro $y > b$: $y = b + |b - 1| \exp\left(\frac{\ln(|x|)}{b+1}\right)$. Závěr:

$$\text{pro } b \in (-\infty; -1): \quad y(x) = b + (1 - b) \exp\left(\frac{\ln(x)}{b+1}\right), \quad x \in (0; +\infty)$$

$$\text{pro } b \in \{-1\}: \quad \text{nemá řešení}$$

$$\text{pro } b \in (-1; +\infty): \quad y(x) = \begin{cases} \begin{cases} b - (b - 1) \exp\left(\frac{\ln(-x)}{b+1}\right), \\ b, \\ b + (b - 1) \exp\left(\frac{\ln(-x)}{b+1}\right), \end{cases} & x \in (-\infty; 0) \\ b, & x \in \{b\} \\ b + (1 - b) \exp\left(\frac{\ln(x)}{b+1}\right), & x \in (0; +\infty) \end{cases}$$

36) Má smysl pro $x \in (-\infty; 0)$ a pro $x \in (0; +\infty)$. Stacionární řešení $y = 0$ vyhovuje zadání. Řešíme pro $y \in (-\infty; 0)$ a pro $y \in (0; +\infty)$. Po integraci: $-\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} - c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravě: $y = \frac{x}{cx+1}$. Omezená řešení jsou:

$$y(x) = \frac{x}{cx+1}, \quad \begin{cases} x \in (-\infty; 0) & \text{pro } c \in (-\infty; 0) \\ x \in (0; +\infty) & \text{pro } c \in (0; +\infty) \end{cases}$$

$$y(x) = 0, \quad \begin{cases} x \in (-\infty; 0) \\ x \in (0; +\infty) \end{cases}$$

37) Nejprve vyřešíme diferenciální rovnici. Ta má smysl pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Řešíme tedy rovnici $y' \exp y = \cos x$, po integraci $\exp y = \sin x + c$, $c \in (-\infty; 1)$. Řešení $y(x) = \ln(\sin x + c)$. Určíme hodnotu konstanty c tak, abby definiční obor tohoto řešení bylo celé $\mathbb{R}$: Musí být $\sin x + c > 0$, odtud $c > -\sin x = \sin(-x) \forall x \in \mathbb{R}$. Tedy $c > 1$. Protože pravá strana rovnice je funkce, která je v každém bodě lokálně lipschitzovská vzhledem k proměnné y (neboť je třídy $\mathcal{C}^\infty \subseteq \mathcal{C}^1$), tak každým bodem roviny $\mathbb{R}^2$ prochází právě jedno řešení. Proto hledanou množinou je množina $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \exp y - \sin x > 1\}$ (jsou to body roviny ležící nad grafem funkce $y = \ln(1 + \sin x)$).

38) Z příkladu 28 víme, že všechna maximální řešení rovnice mají tvar $y(x) = k\pi + \arctg(d(e^x - 2)^3)$, kde $x \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{Z}$. Všechna jsou tedy definována na okolí plus i minus nekonečna. Počítejme: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = k\pi + \arctg(-8d)$ a $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = k\pi + (\operatorname{sgn} d) \frac{\pi}{2}$. Položíme-li $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)$, máme $k\pi + \arctg(-8d) = k\pi + (\operatorname{sgn} d) \frac{\pi}{2}$. Protože $\forall d \in \mathbb{R} \arctg(-8d) \notin \{\pm \frac{\pi}{2}\}$, dostáváme odtud $\operatorname{sgn} d = d = 0$. Tedy $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Závěr: $A \in \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

39) Pokud $x \mapsto y(x)$ je řešení procházející bodem (x_0, y_0) , pak funkce y splňuje rovnici z bodů 4 postupu řešení, tj. $G(y(x)) = F(x) + c$, kde $c = G(y_0) - F(x_0)$. Protože G jako funkce zobrazující okolí y na okolí x je prostá, lze ji invertovat a tedy

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + G(y_0) - F(x_0)).$$

Řešení je tedy na okolí bodu určeno jednoznačně. (rozmyslete si detaily uvedeného postupu)