Optimální regulace

V této kapitole se budeme zabývat úlohou

$$x' = f(x, u), \tag{1}$$
$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

kde $x : [0, t] \to \mathbb{R}^n$ je neznámá funkce, zatímco $u(\cdot)$ je regulace, kterou volíme s cílem optimalizovat chování systému v nějakém předem definovaném smyslu.

Třída ,,přípustných regulací“ má nejčastěji tvar

$$\mathcal{U} = \big\{u : (0, t) \to \mathbb{R}^m;\ u \text{ je měřitelná a } u(s) \in U \text{ pro s.v. } s\big\} \tag{3}$$

kde $U \subset \mathbb{R}^m$ je konvexní množina. Obvykle platí $m < n$, tj. počet stupňů volnosti, kterými na systém působíme, je menší než celková dimenze systému.

Předpokládejme, že vlastnosti funkce f zaručují, že pro každé $u \in \mathcal{U}$ existuje právě jedno řešení úlohy (1–2) na intervalu $[0, t]$. Pokud toto řešení splňuje $x(t) = x_1$, budeme říkat, že regulace u přivádí x_0 do x_1 za čas t, zapsáno symbolicky

$$x_0 \xrightarrow[u(\cdot)]{t} x_1. \tag{4}$$

V teorie regulací se nejčastěji setkáváme s následujícími typy úloh:

1. Pro dané x_1 a $t > 0$ charakterizujte množinu bodů x_1 takových, že $x_0 \xrightarrow[u(\cdot)]{t} x_1$ pro nějakou přípustnou regulaci. (Otázka regulovatelnosti).
2. Pro dané x_0 a x_1 najděte přípustnou regulaci u takovou, že $x_0 \xrightarrow[u(\cdot)]{t} x_1$, přičemž čas t je nejmenší možný. (Časově optimální regulace).
3. Hledáme $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ takové, že hodnota funkcionálu

   $$P[u(\cdot)] = g(x(T)) + \int_0^T r(x(t), u(t))\, dt$$

   je maximální. Hodnota $x(T)$ je dána pevně (obecněji, je prvkem předem dané množiny), zatímco čas T může být libovolný. Alternativně lze uvažovat úlohu, kdy čas T je dán pevně, zatímco hodnota $x(T)$ není předepsána.

Regulovatelnost. Lineární úlohy.

Jednoduché úlohy na regulovatelnost lze řešit pomocí elementárních úvah. Pro snazší vyjadřování zavedeme následující značení a pojmy.

Definice. Pro $t > 0$ a $x_0 \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\mathcal{R}(t) = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n;\ x_0 \xrightarrow[u(\cdot)]{t} 0 \text{ pro vhodné } u(\cdot) \in \mathcal{U} \right\}.$$

To je množina počátečních podmínek, které lze za čas t přivést pomocí přípustné regulace do počátku, neboli oblast regulovatelnosti za čas t.

Systém se nazve lokálně regulovatelný v čase t, pokud $\mathcal{R}(t)$ obsahuje okolí nuly.

Příklad 1. Ukažte, že systém

$$\begin{aligned} x' &= y^3, \\ y' &= u, \qquad u \in [-1, 1], \end{aligned}$$

je lokálně regulovatelný v okolí počátku.

Řešení. Stačí uvážit, jak se chovají řešení pro hodnoty $u \equiv \pm 1$: řešení se pohybují po křivkách

$$\frac{y^4}{4} = \pm x + c.$$

Ty vyplní celou rovinu a snadno si rozmyslíme, že pro libovolné $t > 0$ obsahuje množina $\mathcal{R}(t)$ okolí nuly.

Příklad 2. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je C^1 na okolí počátku. Potom systém

$$x' = f(x)u, \qquad u \in [-1, 1] \tag{5}$$

není lokálně regulovatelný pro žádný čas $t > 0$.

Řešení. Intuitivně vzato přítomnost skalární regulace u pouze mění rychlost pohybu řešení po křivce, která je určena rovnicí

$$x' = f(x), \qquad x(0) = 0. \tag{6}$$

Přesněji: nechť $X(t)$ je řešení (6). Potom $x(t) := X(\int_T^t u(s)ds)$ je řešení původní rovnice (5). Díky jednoznačnosti je toto jediné řešení (splňující $x(T) = 0$). Tedy $\mathcal{R}(T)$ obsahuje jenom body, náležící trajektorii $X(t)$.

Budeme nyní uvažovat lineární případ, tj.

$$x' = Ax + Bu, \tag{7}$$
$$x(0) = x_0 \tag{8}$$

kde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ jsou konstantní matice. Za třídu přípustných regulací volíme

$$\mathcal{U} = L^\infty(0, t; \mathbb{R}^m).$$

Klíčovým objektem lineární teorie je Kalmanova matice regulovatelnosti

$$\mathcal{K}(A, B) = (B, AB, A^2B, \dots A^{n-1}B).$$

Jedná se o matici $n \times mn$. Hlavním výsledkem lineární teorie je následující věta.

Věta 1. *Pro každé $t > 0$ je $\mathcal{R}(t)$ vektorový prostor, generovaný sloupci matice $\mathcal{K}(A, B)$.*

Důsledek. *Úloha* (7) *je globálně regulovatelná – tj. $\mathcal{R}(t) = \mathbb{R}^n$ – pro každé $t > 0$, právě když Kalmanova matice $\mathcal{K}(A, B)$ má hodnost n.*

Poznámka. Všimněme si, že množina $\mathcal{R}(t)$ nezávisí na t. To souvisí s faktem, že přípustné regulace mohou nabývat libovolně velkých hodnot. Zřejmě tedy nemá smysl hovořit o časově optimálních regulacích.

Příklad 3. Uvažujeme systém

$$mx'' = u, \tag{9}$$
$$x(0) = x_0,\ x'(0) = y_0.$$

Cílem je volit $u(\cdot) \in L^\infty(0, t)$ takové, že $x(t) = x'(t) = 0$. Rovnice popisuje (jednorozměrný) problém „zaparkování“, kde m je hmotnost automobilu, regulace u je tah motoru a x_0, y_0 vyjadřují počáteční vzdálenost od počátku respektive rychlost.

Rovnici převedeme na soustavu prvního řádu pro x a $y = x'$, tj.

$$x' = y,$$
$$y' = \frac{u}{m}.$$

Ve smyslu zápisu obecné soustavy tedy máme $n = 2$, $m = 1$ a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\mathcal{K}(A,B) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ \frac{1}{m} & 0 \end{pmatrix}$$

a vidíme, že systém je globálně regulovatelný; dokonce v libovolně malém čase (ovšem za dosti nerealistického předpokladu libovolně velké síly motoru.)

Není překvapující, že jedním z důsledků lineární věty je lokální výsledek pro nelineární problém.

Věta 2. *Nechť $f : V \times U \to \mathbb{R}^n$ je třídy C^1, nechť V respektive U jsou okolí nuly v $\mathbb{R}^n$ respektive $\mathbb{R}^m$, nechť přípustné regulace jsou tvaru* (3)*. Nechť (klíčový předpoklad) matice $\mathcal{K}(A,B)$ má hodnost n, kde*

$$A = \nabla_x f(0,0), \qquad B = \nabla_u f(0,0).$$

Potom rovnice (1) *je lokálně regulovatelná pro každé $t > 0$.*

Poznámka. Klíčová podmínka na hodnost $\mathcal{K}(A,B)$ pochopitelně není *nutná*, jak ukazuje Příklad 1 výše.

Příklad 4. Uvažujeme pohyb kyvadla se třením, popsaný rovnicí

$$\begin{aligned} mx'' + q(x') + \sin x &= u, \\ x(0) = x_0,\ x'(0) &= y_0. \end{aligned}$$

Funkce $q(\cdot)$ vyjadřuje tření a obvykle na ni proto klademe rozumné fyzikální požadavky. Pro účely příkladu nám postačí, že q je třídy C^1 a $q(0) = 0$.

Převedeme rovnici opět na systém pro x a y, tj.

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -\frac{1}{m}\sin x - \frac{1}{m}q(y) + \frac{1}{m}u. \end{aligned}$$

Lehce se spočítá, že příslušné linearizace jsou dány maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{m} & -\frac{a}{m} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m}, \end{pmatrix}$$

kde $a = q'(0)$. Potom

$$\mathcal{K}(A,B) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ \frac{1}{m} & -\frac{a}{m^2} \end{pmatrix},$$

což je zjevně regulární matice. Systém je tedy lokálně regulovatelný.

Řešte úlohy na regulovatelnost.

1. Dokažte, že uvedené body $\tilde{x}$ neleží v oboru regulovatelnosti příslušných systémů:

(a) $\tilde{x} \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y > 0\}$

$$\begin{aligned} x' &= u \\ y' &= \cosh x \end{aligned}$$

(b) $\tilde{x} \in R^2 \setminus (0,0)$

$$\begin{aligned} x' &= xy^2u \\ y' &= x^2yu \end{aligned}$$

(c) $\tilde{x} \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \geq 1\}$

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{4}}} - \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} - uy^2 \\ y' &= xy\left(\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{4}}} - \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} + u\right) \end{aligned}$$

pro $(x,y) \neq (0,0)$; jinak $x' = y' = 0$.

(d) $\tilde{x} \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y > 1\}$

$$\begin{aligned} x' &= \begin{cases} \frac{u}{x^2+y-1}, & x^2+y \neq 1 \\ 0, & x^2+y = 1 \end{cases} \\ y' &= x^2+u^2 \end{aligned}$$

2. Nalezněte množinu regulovatelnosti soustav:

(a)

$$\begin{aligned} x' &= xy \\ y' &= \begin{cases} \frac{u^2}{x+y-1}, & x+y \neq 1 \\ 0, & x+y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x' &= \cos(xy) \\ y' &= \cos x + u \end{aligned}$$

3. Určete oblast regulovatelnosti systému

$$\begin{aligned} x' &= xyu \\ y' &= \operatorname{arctg} x - \operatorname{arccotg} y. \end{aligned}$$

Jak, pokud vůbec, se tato množina změní bez požadavku esenciální omezenosti funkce u?

4. Aniž byste hledali přesná řešení, navrhněte regulační postup (globálně regulovatelného) systému

$$\begin{aligned} x' &= \sin y \\ y' &= x + u. \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} x' &= -x + z \\ y' &= y - z + u \\ z' &= -y + z - u \end{aligned}$$

6. Pro jakou volbu vektoru $(a, b) \in R^2$ jsou následující systémy globálně regulovatelné?

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \mathrm{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} u$$

Matici A volíme postupně jakožto

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zkuste výsledek nejprve uhodnout (resp. odůvodnit intuitivně) na základě chování systému bez regulace (tj. pokud $u = 0$).

7. Ukažte, že rovnice

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x = u$$

je globálně regulovatelná.

8. Pro $n \in \mathbb{N}$ určete oblast regulovatelnosti systému

$$x' = Ax + Bu,$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

a matice regulací B je tvaru

(a)

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

9. Nechť $n \in \mathbb{N}$. V závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ určete oblast regulovatelnosti systému

$$x' = Ax + Bu,$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

a matice regulací B je tvaru

(a)

$$B = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \vdots \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

10. Pro $n \in \mathbb{N}$ určete oblast regulovatelnosti systému

$$x' = Ax + Bu,$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

11. Pro $n \in \mathbb{N}$ určete oblast regulovatelnosti systému

$$x' = Ax + Bu,$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 \\ n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

12. Ukažte, že následující systém je lokálně regulovatelný v počátku:

$$\begin{aligned} x' &= x + y^2 + u \\ y' &= \sin z + u^2 \\ z' &= x + \sin y + \cos z - 1 \end{aligned}$$

13. Zobecněte znění věty o lokální regulovatelnosti tak, aby výsledkem byla regulovatelnost rovnice na okolí předem daného bodu $\tilde{x}$. Tuto pak aplikujte na důkaz regulovatelnosti následujících systémů na okolí příslušných bodů $\tilde{x}$. V některých případech bude nutno určit správné hodnoty parametrů $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

(a) $\tilde{x} = (\pi/2, 0, \pi)$

$$\begin{aligned} x' &= \sin(\alpha yz) + u^2 \\ y' &= \cos x + \beta u \\ z' &= \operatorname{cotg} x + \cos y + \sin z + \gamma \end{aligned}$$

(b) $\tilde{x} = (1, 1)$

$$\begin{aligned} x' &= -\beta xy + y^\alpha + \beta e^{\frac{\alpha u}{\beta}} - \beta^2 + (\alpha - 1)(\alpha + 1) \\ y' &= \alpha x - 3 + \beta u \end{aligned}$$

(c) $\tilde{x} \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in (-\pi/2, \pi/2) \wedge x - y = \frac{\pi}{2}\}$

$$\begin{aligned} x' &= \alpha \sin x - \beta \cos y - u^2 \\ y' &= \sin^2 x + \beta \cos^2 y + u \end{aligned}$$

(d) $\tilde{x} \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 4 \wedge xy \geq 0\}$

$$\begin{aligned} x' &= \sqrt{x^2 + y^2} - x^2 - y^2 + ux \\ y' &= e^{x^2 + y^2} + uy \end{aligned}$$

Návody a řešení.

1) (a) $y' \geq 1$.

(b) Lze si povšimnout $(x^2 - y^2)' = 0$, a proto ihned vyloučíme body (x, y) nevyhovující rovnici $x^2 = y^2$ (viz Obrázek 1). Neregulovatelnost (1-dimenzionální) rovnice $x' = x^3 u$ se ukáže integrací a užitím esenciální omezenosti u.

(c) Po přechodu do polárních souřadnic, k němuž nabádají radiální členy, získáme

$$\begin{aligned} r' &= \sqrt{r}(1 - \sqrt{r}) \cos \omega \\ \omega' &= r u \sin \omega. \end{aligned}$$

Pronikne-li tedy řešení na jednotkovou kružnici, již ji neopustí.
Jestliže se nechceme uchylovat k polárním souřadnicím, je možné první rovnici vynásobit x, druhou vynásobit y, obě rovnice sečíst a všimnout si, že na jednotkové kružnici platí $(x^2 + y^2)' = 0$.

(d) Ocitne-li se řešení na dělicí parabole, může z ní pokračovat pouze v kladném směru osy y.

2) (a) Po zakreslení zadaného vektorového pole (viz Obrázek 2) po chvíli vyloučíme vše kromě množiny $\{(0, s);\ s \in (0, 1)\}$, na níž si vystačíme s volbou $u \equiv 1$.

(b) Po grafickém ztvárnění (podstatné je správné nakreslení křivek $xy = \frac{\pi}{2} + k\pi$, viz Obrázek 3) vyvodíme jako oblast regulovatelnosti množinu $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x < 0\}$.
Příklad regulačního postupu je prvně položit $u \equiv -2 \operatorname{sgn} y_0 + y_0/x_0$. Takto se nám podaří setkat se s trajektorií regulovaného řešení, které existuje v množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |xy| \leq \pi/4 \wedge x < 0\}$ a při zpětném probíhání má v nekonečném čase limitu $(0, -\infty)$.

3) Na množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 0\}$ pozorujeme $y' < 0$ (viz Obrázek 4) a na jistém okolí počátku $y' \leq c < 0$. Odsud plyne neregulovatelnost $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \leq 0\}$. Množina $\{(0, y);\ y > 0\}$ naopak regulovatelná je bez ohledu na volbu u. Na ostatních zatím nezmíněných oblastech platí kvůli klesavosti y poblíž osy x odhad $|x'| \leq |x| \cdot y_0 \cdot \|u\|_\infty$. Odpovídající řešení jsou proto v x-souřadnici odražená od nuly funkcí $x_0 \exp(-t \cdot y_0 \cdot \|u\|_\infty)$.
Upustíme-li od požadavku $\|u\|_\infty < \infty$, stále nejsme schopni vylepšit situaci množiny $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \leq 0\}$ ze stejných důvodů jako v předchozím případě. Totéž však neplatí pro $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \neq 0,\ y > 0\}$. Volbou u jako po částech konstantních „schodů do nebe" jsme schopni udržet $|x'| \geq c > 0$, kde c je konstanta dost velká na to, aby se řešení blížilo k ose y rychleji než k ose x (např. $c = 3\pi |x_0| y_0^{-1}/2$). Kvůli limity monotónní posloupnosti musí

takové řešení nutně skončit na ose y v čase seshora omezeném konstantou c. Zeslabením předpokladů jsme tak rozšířili oblast regulovatelnosti na $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y > 0\}$.

4) Ideu rozvedeme ve třech krocích, jejichž poskládáním regulujeme řešení o libovolné počáteční podmínce. Pro lepší představu viz obrázky 5 a 6.

I/$(x_0, y_0) = (0, 2k\pi),\ k \in \mathbb{N}$.

Položme $u \equiv -1$. Protože nyní

$$\left(\frac{(x-1)^2}{2} + \cos y\right)' = 0,$$

řešení o uvedené počáteční podmínce splňuje $x = 1 - \sqrt{3 - 2\cos y}$, což je 2π-periodická funkce v proměnné y, striktně záporná na $(2(k-1)\pi, 2k\pi)$. Odtud a z rovnice pro y' dostáváme, že příslušné řešení dorazí do bodu $(0, 2(k-1)\pi)$, a to nejpozději v čase $t = 2\pi$. Povšimněme si navíc

$$C := \max_{y \in [2(k-1)\pi, 2k\pi]} |x(y)| = \sqrt{5} - 1.$$

Analogický postup s $u \equiv 1$ zajistí přechod $(0, -2k\pi) \to (0, -2(k-1)\pi)$.

II/$(x_0, y_0) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \in [2k\pi + 5\pi/4, 2k\pi + 7\pi/4],\ k \in \mathbb{Z} \wedge (x,y)$ leží napravo od trajektorie z předchozího bodu mezi $(0, 2(k+1)\pi)$a$(0, 2k\pi)\}$.

Interval $[2k\pi + 5\pi/4, 2k\pi + 7\pi/4]$ značí pás, v němž $x' \leq -1/\sqrt{2}$. Vhodným přepínáním u v tomto intervalu s y-souřadnicí zůstaneme. Dosáhneme tak driftování v x-souřadnici až do styku s trajektorií z předchozího bodu, kdy zapojíme jemu příslušející hodnotu u. Délka doby trvání této fáze nepřekročí hodnotu $\sqrt{2}(|x_0| + C)$.
Zcela analogicky by postup fungoval pro (x_0, y_0) takové, že $y_0 \in [2k\pi + \pi/4, 2k\pi + 3\pi/4]$, $k \in \mathbb{Z}$, a navíc (x_0, y_0) leží nalevo od trajektorie z předchozího bodu mezi $(0, 2(k+1)\pi)$ a $(0, 2k\pi)$.

III/(x_0, y_0) všude jinde.

Dosazením vhodné konstanty za u dorazíme do „potrubí" z předchozího případu nebo překřížíme trajektorii z prvního případu. Kupříkladu volbou $u \equiv -x_0 + 2\pi$ se tak stane za čas $t < 3$.

5) Kalmanova matice má rank 2 a její sloupce generují nadrovinu $y + z = 0$.

6) (i) $a^2 + b^2 \neq 0$, (ii) $ab \neq 0$, (iii) $b^2 + 2ab - a^2 \neq 0$.

7) Převeďte na systém n rovnic; Kalmanova matice má na vedlejší diagonále jednotky a nad ní je nulová.

8) (a) $\mathcal{K}(A,B)$ je dolní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále.

(b)

$$\mathcal{K}(A,B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2^{n-1} \\ 1 & 2 & \dots & 2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & \dots & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Sloupce Kalmanovy matice generují $\mathrm{lin}\{(1,1,\dots,1)\}$.

9) (a)

$$\mathcal{K}(A,B) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & \beta \\ \beta & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Je-li n liché, pak: $\alpha \neq -\beta \Rightarrow \mathrm{h}(\mathcal{K}(A,B)) = n$.
$\alpha = -\beta \neq 0 \Rightarrow \mathrm{h}(\mathcal{K}(A,B)) = n-1$, sloupce $\mathcal{K}(A,B)$ generují nadrovinu $(1,\dots,1)^\perp$.

Je-li n sudé, pak: $\alpha \neq \pm\beta \Rightarrow \mathrm{h}(\mathcal{K}(A,B)) = n$.
$\alpha = -\beta \neq 0 \Rightarrow \mathrm{h}(\mathcal{K}(A,B)) = n-1$, sloupce $\mathcal{K}(A,B)$ generují nadrovinu $(1,\dots,1)^\perp$.
$\alpha = \beta \neq 0 \Rightarrow \mathrm{h}(\mathcal{K}(A,B)) = n-1$, sloupce $\mathcal{K}(A,B)$ generují nadrovinu $(1,-1,\dots,1,-1)^\perp$.

(b)

$$\mathcal{K}(A,B) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & \dots & \beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta & \beta & \beta & \dots & \alpha \end{pmatrix}_{n\times n}$$

$\alpha = \beta \neq 0 \Rightarrow$ sloupce $\mathcal{K}(A,B)$ generují $\mathrm{lin}\{(\alpha,\alpha,\dots,\alpha)\}$.
$\alpha = -(n-1)\beta \neq 0 \Rightarrow \mathrm{h}(\mathcal{K}(A,B)) = n-1$, sloupce generují nadrovinu $(1,\dots,1)^\perp$.

10)

$$
\mathcal{K}(A,B) = \begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\
\hdotsfor{7} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2
\end{pmatrix}_{n \times n}
$$

Kalmanova matice je regulární, o čemž se můžeme přesvědčit například výpočtem jejího determinantu. Po sestavení rekurentního vztahu a ověření nástřelu vyvozeného z $n = 1, 2, 3$ vyjde $\det(\mathcal{K}(A,B)) = n + 1$.

11)

$$
\mathcal{K}(A,B) = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (n-1)! \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)! & n! \\
\hdotsfor{7} \\
0 & & 0 & (n-3)(n-2)(n-1) & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & (n-2)(n-1) & (n-2)(n-1)n & \dots & 0 & 0 \\
0 & n-1 & (n-1)n & 0 & \dots & 0 & 0 \\
1 & n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

Kalmanova matice je regulární (opět lze snadno spočíst $\det(\mathcal{K}(A,B))$).

13) Jediná modifikace spočívá v předpokladu $f(\tilde{x}, 0) = 0$ a v užívání $\nabla_x f(\tilde{x}, 0), \nabla_u f(\tilde{x}, 0)$, kde $x' = f(x, u)$ – zobecnění $f(0,0) = 0$, $\nabla_x f(0,0)$, $\nabla_u f(0,0)$. V dalším značme $A = \nabla_x f(\tilde{x}, 0), B = \nabla_u f(\tilde{x}, 0)$.

(a)

$$
\mathcal{K}(A,B) = \begin{pmatrix}
0 & \alpha\beta\pi & 0 \\
\beta & 0 & -\alpha\beta\pi \\
0 & 0 & \alpha\beta\pi
\end{pmatrix}
$$

$\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma = -1.$

(b)

$$
\mathcal{K}(A,B) = \begin{pmatrix}
\alpha & -\beta^2 \\
\beta & \alpha^2
\end{pmatrix}
$$

$\alpha = \beta = 3.$

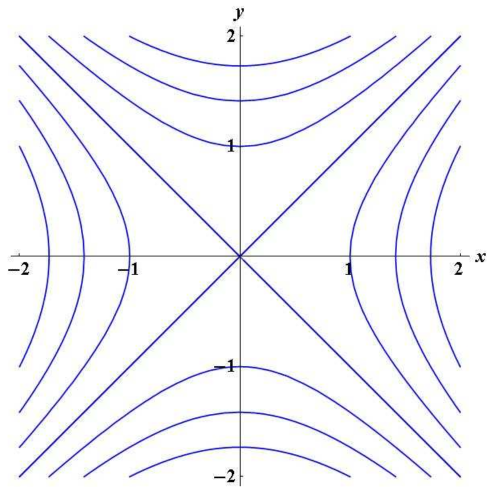
(c)

$$
\mathcal{K}(A,B) = \begin{pmatrix}
0 & \cos x \\
1 & \sin(2x)
\end{pmatrix}
$$

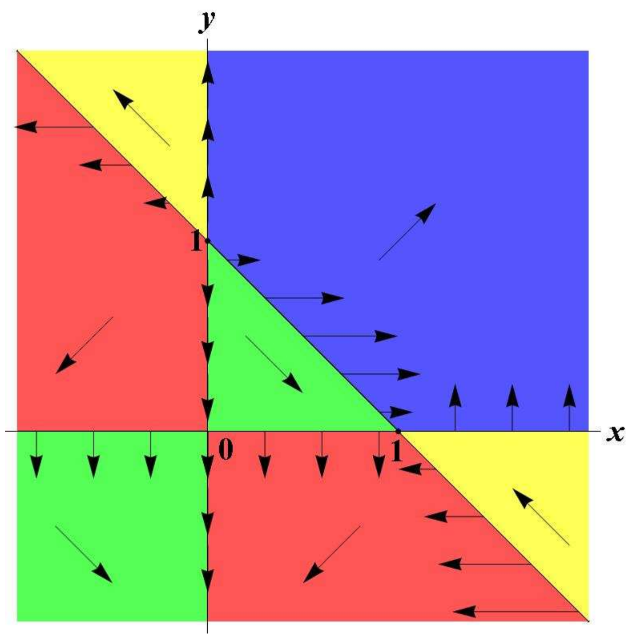
$\alpha = \beta = -1.$

(d)

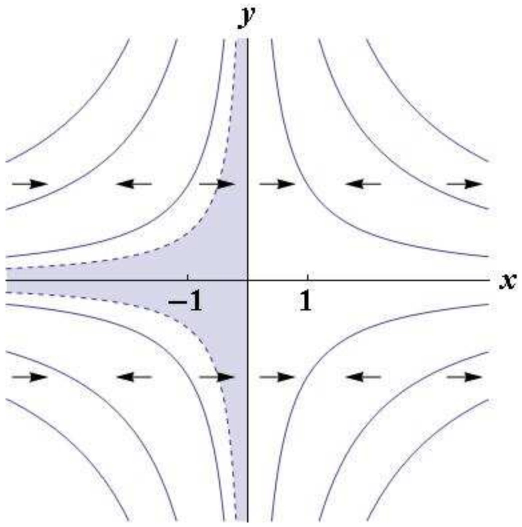
$$
\mathcal{K}(A,B) = \begin{pmatrix}
x & -6 \\
y & 8e^4
\end{pmatrix}
$$



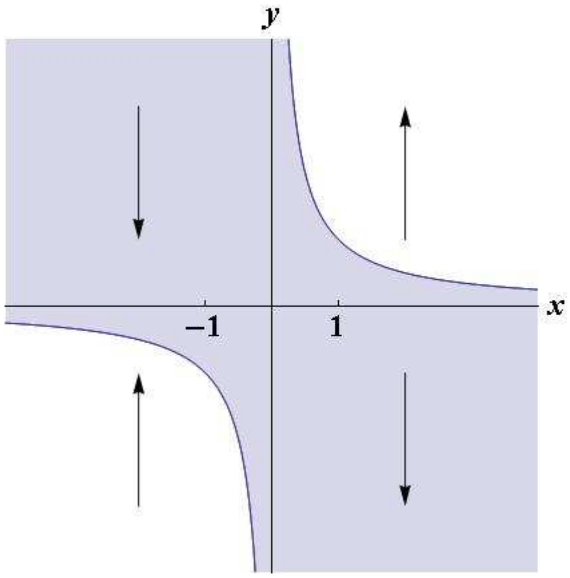
Obrázek 1: Úloha 1b – úrovňové množiny funkce $x^2 - y^2$ pro hodnoty $-3, -2, \ldots, 3$.



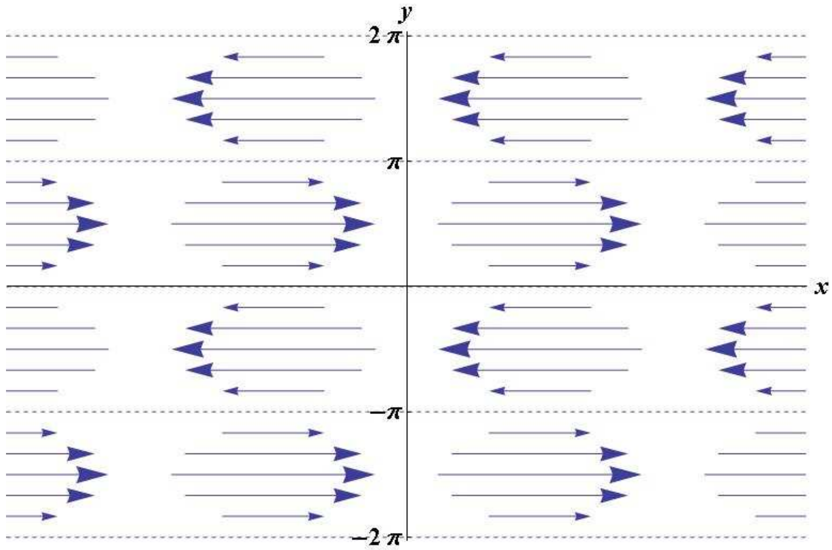
Obrázek 2: Fázový portrét cvičení 2a, v němž stejné barvy značí stejnou kombinaci znamének x' a y'.



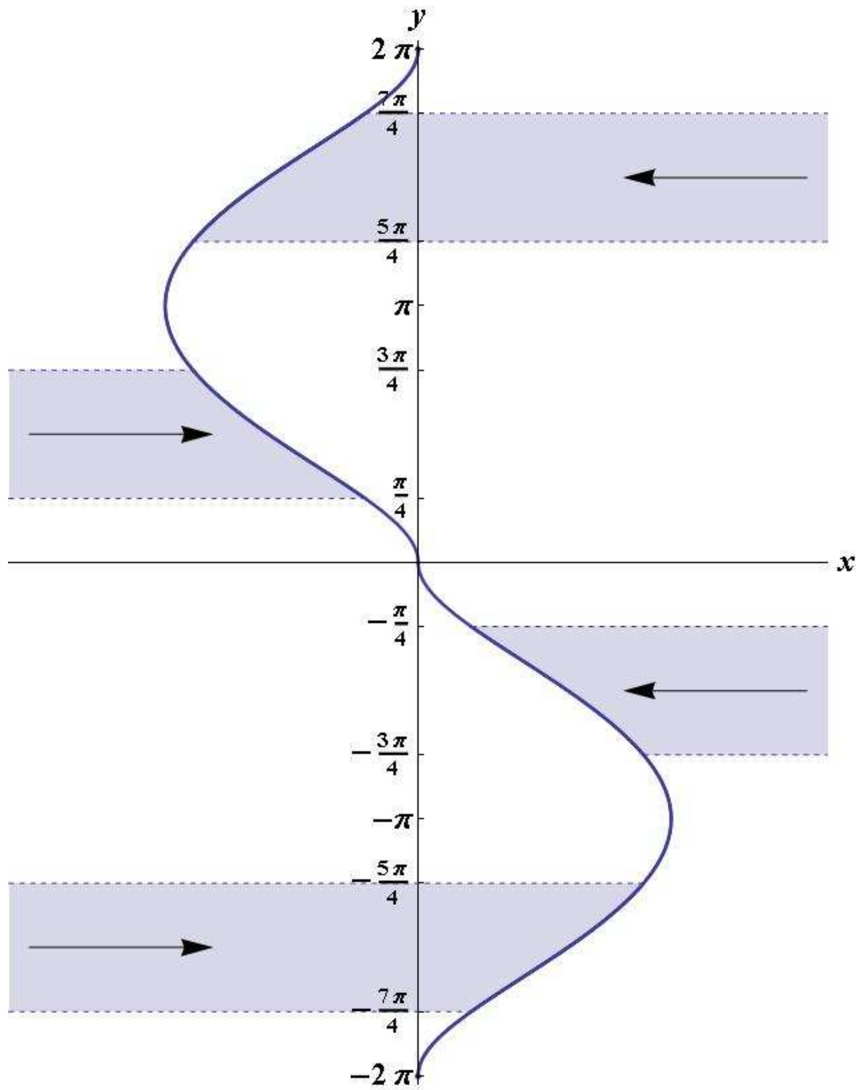
Obrázek 3: Úloha 2b – úrovňové množiny funkce xy pro hodnoty $-5\pi/2$, $-3\pi/2 \dots 5\pi/2$ se znázorněným směrem x'. Zvýrazněná je množina $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |xy| \leq \pi/4 \wedge x < 0\}$.



Obrázek 4: Pomoc ke cvičení 3, kde zvýraznění značí $y' < 0$.



Obrázek 5: Ztvárnění x' ze cvičení 4.



Obrázek 6: Trajektorie regulovaných řešení začínajících v bodech $(0, -2\pi)$ a $(0, 2\pi)$ ze cvičení 4. Zvýrazněné oblasti značí počáteční podmínky spadající do kroku II.

Pozorovatelnost.

Uvažujme nyní obecnou nelineární rovnici

$$x' = f(x) \tag{10}$$

a definujme ,,pozorovanou veličinu"

$$y = g(x), \tag{11}$$

kde $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Opět obvykle platí $m < n$, tj. pozorování obsahuje méně informace než celý systém.

Definice. Řekneme, že rovnice (10) je pozorovatelná skrze veličinu (11), jestliže pro libovolná dvě řešení x_1, x_2 a čas $t > 0$ platí:

$$g(x_1) = g(x_2) \text{ na } [0, t] \qquad \Longrightarrow \qquad x_1(0) = x_2(0).$$

Poznámka. Vzhledem k jednoznačnosti řešení je závěr implikace $x_1(0) = x_2(0)$ ekvivalentní tomu, že řešení se shodují na celém intervalu $[0, t]$.

Úlohy na pozorovatelnost lze opět řešit na základě elementárních úvah. V lineárním případě lze situaci vyřešit obecně; navíc se ukazuje, že pozorovatelnost je v jistém smyslu duální pojem k regulovatelnosti.

Věta 3. *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ jsou konstantní matice. Potom rovnice*

$$x' = Ax \tag{12}$$

je pozorovatelná skrze

$$y = Bx, \tag{13}$$

právě když rovnice

$$x' = A^T x + B^T u$$

je globálně regulovatelná.

Důsledek. *Rovnice* (12) *je pozorovatelná skrze* (13)*, právě když $\mathcal{K}(A^T, B^T)$ má hodnost n.*

Příklad 5. Najděte nutnou a postačující podmínku na čísla a_{ij}, aby systém

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned}$$

byl pozorovatelný skrze veličinu x.

Řešení. V souladu s předchozí větou máme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\mathcal{K}(A^T, B^T) = \begin{pmatrix} 1 & a_{11} \\ 0 & a_{12} \end{pmatrix};$$

tato matice má požadovanou hodnost 2, právě když $a_{12} \neq 0$.

Řešte úlohy týkající se pozorovatelnosti.

14. Najděte (co nejjednodušší) příklad matice A takové, aby systém

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \mathrm{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

byl pozorovatelný pouze na základě proměnné x. Případně charakterizujte takové matice.

15. V závislosti na $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, rozhodněte, pro jaká $V \in \mathbb{R}^{m \times n}$ bude systém $x' = Ax$ pozorovatelný skrze veličinu $y = Vx$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2n \\ 3 & 6 & 9 & \dots & 3n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 2n & 3n & \dots & n^2 \end{pmatrix}$$

16. Zkoumejte pozorovatelnost následujících systémů skrze V_1 a V_2:

(a) $x' = y^2$
$y' = x^2$

$V_1 = x - y$
$V_2 = x$

(b) $x' = y^2$
$y' = -x^{-4}$

$V_1 = x \cdot y$
$V_2 = x$

17. Uvažme systém

$$x' = xy$$
$$y' = -y/x.$$

Rozhodněte o jeho pozorovatelnosti veličinou $V = x \cdot y$, budete-li brát v úvahu pouze následující počáteční podmínky (x_0, y_0):

(a) $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{lin}\{e_2\}$

(b) $(x_0, y_0) \in \{(a, a)|\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}\}$

18. Aniž byste se odkazovali na teorii regulací, rozhodněte o pozorovatelnosti rovnice $x''' - x'' + x' - x = 0$ pomocí veličin:

(a) $V = x + x''$

(b) $V = x + x' + x''$

(c) $V = (x + x'')x'$

19. Dokažte, že systém

$$x' = y$$
$$y' = e^x$$

není pozorovatelný skrze veličinu $V = \sin \frac{1}{y}$.

(tip: soustřeďte svou pozornost na případ $y_0 = \sqrt{2e^{x_0}}$)

20. Mějme lineární systém

$$x' = y$$
$$y' = -x,$$
$$(x, y) = (x(t), y(t)), \quad t \in [0, \pi].$$

Vyšetřujte jeho pozorovatelnost pomocí zadaných veličin. V případě nepozorovatelnosti charakterizujte všechna řešení, jež daná veličina vzájemně neodliší.

(a) $V = x^2 + y^2$

(b) $V = x$

(c) $V = x \cdot y$

(d) $V = x(0) \cdot y(0)$

(e) $V = S \cdot (x - y)$,
kde $S = S(t)$ je obsah oblasti vymezené křivkou $\{(x(s), y(s)),\ s \in [0, t]\}$ a spojnicemi jejích krajních bodů s počátkem $(0, 0)$.

Řešení.

14) První řádek $(0,1,0)$, druhý řádek $(0,0,1)$. Menší hodnost než dva mít A nemůže.

15) Sloupce matic $A(=A^T), A^2, \dots, A^{n-1}$ jsou násobky vektoru $(1,\dots,n)$, a proto sloupce $\mathcal{K}(A^T, V^T)$ generují $\mathrm{lin}\{v_1,\dots,v_m,(1,2,\dots,n)\}$, kde v_i jsou řádky matice V. Systém tedy bude pozorovatelný na základě V, právě když $m = n-1$ a $\{v_1,\dots,v_m,(1,2,\dots,n)\}$ je lineárně nezávislá množina.

16) (a) $x_0 = y_0 \Rightarrow V_1 \equiv 0$, čili systém není pozorovatelný pomocí V_1. Systém je ovšem pozorovatelný pomocí V_2. Můžeme dokazovat sporem $(x^1 \equiv x^2 \wedge y_0^1 \neq y_0^2)$, užijeme neklesavost y.

(b) $x_0 = 1/y_0 \Rightarrow V_1 \equiv 1$, a tedy systém není pozorovatelný skrze V_1. Pozorovatelnost na základě V_2 se dokáže obdobně jako pro předchozí systém.

17) (a) $x_0 = 1/y_0 \Rightarrow V_1 \equiv 1$, systém není pozorovatelný.

(b) Při označení $c = (x_0^2 - 1)/x_0$ je řešením uvedeného systému

$$x(t) = \frac{x_0^2 e^{ct} - 1}{c}$$
$$y(t) = \frac{c x_0^2 e^{ct}}{x_0^2 e^{ct} - 1}$$

Z veličiny $V = x \cdot y = x_0^2 e^{ct}$ lze x_0 jednoznačně určit, a proto je systém při uvedených povolených počátečních podmínkách pozorovatelný.

18) $x(t) = c_1 e^t + c_2 \sin t + c_3 \cos t$,
kde $c_{1,2,3} = c_{1,2,3}(x_0, x_0', x_0'')$ je bijekce $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

(a) $V = x + x'' = 2c_1 e^t$,
a tedy V nerozlišuje řešení s totožným c_1. Rovnice pomocí V není pozorovatelná.

(b) $V = x + x' + x'' = 3c_1 e^t + c_2 \cos t - c_3 \sin t$,
odkud lze (c_1, c_2, c_3) (proto i (x_0, x_0', x_0'')) jednoznačně určit. Rovnice je skrze V pozorovatelná.

(c) V nedělá rozdíl mezi řešeními s opačnými znaménky, čili rovnice není pomocí V pozorovatelná.

19) Uvažujeme-li případ $y_0 = \sqrt{2e^{x_0}}$, je zadaný systém řešen funkcemi

$$x(t) = \ln\left(\frac{2}{2 - y_0 t}\right)^2 + x_0$$
$$y(t) = \frac{2y_0}{2 - y_0 t}$$

a odtud

$$V = \sin\frac{1}{y} = \sin\left(\frac{1}{y_0} - \frac{t}{2}\right) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2e^{x_0}}} - \frac{t}{2}\right).$$

Zvolíme-li nyní druhou počáteční podmínku jako

$$x_1 = 2\ln\frac{\sqrt{e^{x_0}}}{1 + 2\pi\sqrt{2e^{x_0}}},$$

pak ze sinové periodicity nebudou příslušná řešení skrze V rozlišena.

20) Uvedenou soustavu řeší

$$x(t) = r_0 \sin(t + \omega_0)$$
$$y(t) = r_0 \cos(t + \omega_0),$$

kde $(x(0), y(0)) = (r_0 \sin\omega_0, r_0\cos\omega_0)$, $r_0 \geq 0$, $\omega_0 \in [0, 2\pi)$. Vzhledem k omezení definičního oboru na interval $[0, \pi]$ je grafem půlkružnice se středem v počátku, vykreslovaná konstantní rychlostí v záporném směru.

(a) nepozorovatelnost
Všechna řešení s totožnou hodnotou r_0 splývají.

(b) pozorovatelnost
Pomocí teorie regulací nebo elementární úvahou.

(c) nepozorovatelnost
Nelze rozlišit řešení (x, y) a $(-x, -y)$; neboli veličina $V = \frac{r_0^2}{2}\sin(2t+2\omega_0)$ určí ω_0 až na násobek π, potřebovali bychom až na násobek 2π.

(d) nepozorovatelnost
Splývají řešení splňující $(x(0), y(0)) = (x(0), V/x(0))$ pro $V \neq 0$ a s počáteční podmínkou na osách x, y pro $V = 0$.

(e) pozorovatelnost
$S(t) = \frac{r_0^2}{2}t$ a užitím součtového vzorce dostaneme

$$V = -\frac{r_0^3}{\sqrt{2}} t \cos\left(t + \omega_0 + \frac{\pi}{4}\right),$$

odkud jsme na $[0, \pi]$ s to jednoznačně určit (r_0, ω_0).

Časově optimální regulace. Princip maxima.

Nyní se budeme zabývat opět lineární úlohou

$$x' = Ax + Bu, \tag{14}$$

ovšem za předpokladu omezených hodnot přípustných regulací. Přesněji řečeno, požadujeme

$$u(\cdot) \in \mathcal{U} = \big\{ u : (0,t) \to U \text{ měřitelné, } U = [-1,1]^m \big\} \tag{15}$$

Cílem je zvolit $u(\cdot)$ takové, že $x_0 \xrightarrow[u(\cdot)]{t} 0$ v nejkratším možném čase.

Všimněme si nejprve otázek regulovatelnosti úlohy (14–15). Označíme opět

$$\mathcal{R}(t) = \big\{ x_0 \in \mathbb{R}^n;\ x_0 \xrightarrow[u(\cdot)]{t} 0 \text{ pro vhodné } u(\cdot) \in \mathcal{U} \ \big\}$$

a dále definujme

$$\mathcal{R} = \bigcup_{t>0} \mathcal{R}(t).$$

Potom platí následující věta.

Věta 4. *Nechť matice $\mathcal{K}(A,B)$ má hodnost n. Potom pro každé $t > 0$ je úloha (14–15) lokálně regulovatelná, tj. obsahuje $\mathcal{R}(t)$ okolí 0.*

Jestliže navíc $\operatorname{Re}\lambda \le 0$ pro každé vlastní číslo λ matice A, je úloha globálně regulovatelná, tj. $\mathcal{R} = \mathbb{R}^n$.

Otázka *existence* časově optimální regulace je též snadno řešitelná – a to díky linearitě rovnice a konvexitě množiny U.

Věta 5. *Nechť $x_0 \in \mathcal{R}(t)$ pro nějaké $t > 0$. Potom existuje $t^* \le t$ a $u^*(\cdot) \in \mathcal{U}$ takové, že $x_0 \xrightarrow[u^*(\cdot)]{t^*} 0$, kde čas t^* je nejmenší možný.*

Následující věta dává *nutnou* podmínku optimality dané regulace.

Věta 6 (Pontrjaginův princip maxima)**.** *Nechť $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ přivádí rovnici* (14) *do 0 v optimálním – tj. nejmenším možném – čase t. Potom existuje nenulový vektor $h \in \mathbb{R}^n$ tak, že*

$$h^T \exp(-sA)Bu(s) = \max_{\eta \in [-1,1]^m} h^T \exp(-sA)B\eta \tag{16}$$

pro skoro všechna $s \in (0,t)$.

Poznámka. Připomeňme si Lagrangeovu větu o multiplikátorech. Nutnou podmínkou toho, aby bod x byl extrémem funkce $f(x)$ vzhledem k množině $\{x;\ g_1(x) = 0,\ \ldots,\ g_k(x) = 0\}$, je – za vhodných předpokladů na hladkost funkcí f, g_j – existence čísel $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ takových, že

$$\nabla g(x) = \lambda_1 \nabla g_1(x) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(x). \tag{17}$$

Při řešení příkladů obvykle nemusíme počítat hodnoty λ_j; z rovnice (17) získáme jakousi částečnou informací, díky níž omezíme množinu ,,podezřelých" bodů na několik málo prvků. Spolu s informací o *existenci* extrémů pak ,,pachatele" snadno identifikujeme.

Zde je situaci podobná: podmínka (16) působí dosti záhadně, ovšem v konkrétním případě snadno poskytne dost informace, abychom mohli identifikovat tvar optimální regulace.

Příklad 3 – pokračování. Hledejme regulaci $u : (0,t) \to [-1,1]$, která zaparkuje v nejkratším čase. Její existence je zaručena Větami 4, 5 spolu s nulovostí spektra matice A. Přímo z definice se lehce spočítá, že

$$\exp(-sA) = \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dle Pontrjaginova principu maxima existuje nenulový vektor $h = (h_1, h_2)$ takový, že

$$(h_2 - h_1 s)u(s) = \max_{\eta \in [-1,1]} (h_2 - h_1 s)\eta.$$

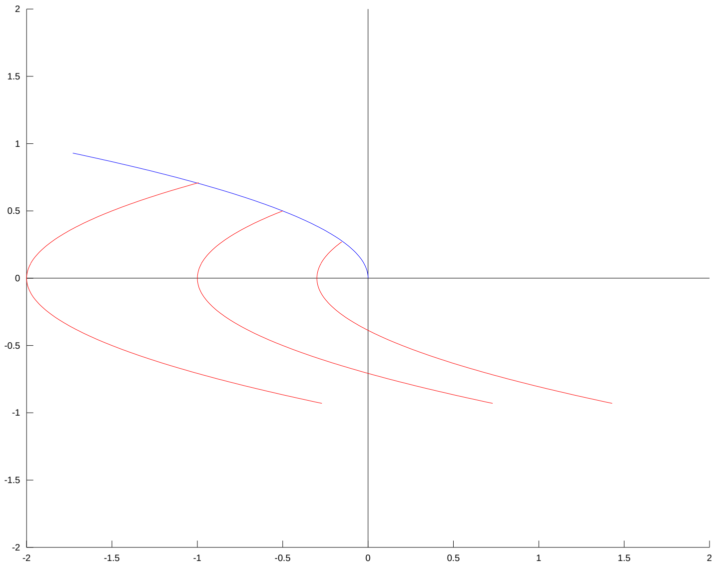
Odtud lehce plyne, že $u(s) = \operatorname{sgn}(h_2 - h_1 s)$ pro s.v. s. To speciálně znamená, že u nabývá pouze hodnot ± 1 a ke změně znaménka dojde nejvýše jednou. Za účelem konstrukce optimálních regulací je užitečné načrtnout chování systému pro $u = \pm 1$. Snadno se ukáže, že odpovídající první integrály jsou paraboly

$$\pm x = c - \frac{m}{2}(x')^2.$$

Optimální regulaci je nejlépe konstruovat pozpátku: pro $u = -1$ vidíme na obrázku **??** řešení, přivádějící systém v konečném čase do počátku (modré). K této trajektorii dorazíme pomocí $u = 1$ (červená). Není obtížné si rozmyslet, že libovolnou počáteční podmínku lze takto regulovat *právě jedním* způsobem.

Princip maxima – obecný případ.

Na závěr zformulujeme Pontrjaginův princip maxima v obecném tvaru coby *nutnou* podmínku optimálního řízení.



Obrázek 7: Příklad 3 – řešení pro $u = -1$ (modré) a $u = 1$ (červené).

Uvažujeme obecnou úlohu

$$x' = f(x, u), \tag{18}$$

s přípustnými regulacemi tvaru

$$u(\cdot) \in \mathcal{U} = \big\{u : (0, T) \to U;\ u \text{ je měřitelná a } u(s) \in U \text{ pro s.v. } s\big\}, \tag{19}$$

kde $U \subset \mathbb{R}^m$ je libovolná množina. Cílem je maximalizovat funkcionál

$$P[u(\cdot)] = g(x(T)) + \int_0^T r(x(t), u(t))\, dt. \tag{20}$$

Zavedeme následující pojmy. Hamiltonián $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ jako

$$H(x, p, a) = f(x, a) \cdot p + r(x, a)$$

a tzv. adjungovanou úlohu

$$p' = -\nabla_x H(x, p, u) \tag{21}$$

Věta 7. *Nechť $u(\cdot)$ je maximum úlohy (18–20), kde čas $T > 0$ a počáteční podmínka $x(0) = x_0$ jsou zadány, zatímco $x(T)$ je neurčeno. Předpokládejme, že funkce f, r a g jsou spojité a mají spojité derivace vzhledem k x.*

Potom pro s.v. $s \in (0, T)$ platí

$$H(x(t), p(t), u(t)) = \max_{\eta \in U} H(x(t), p(t), \eta),$$

kde $p(t)$ je řešení adjungované úlohy (21) *s* koncovou *podmínkou*

$$p(T) = \nabla_x g(x(T)). \tag{22}$$

Předpoklady věty zaručují, že pro dané $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ existuje právě jedno $x(t)$ řešení rovnice (18). Adjungovaná rovnice po složkách je

$$p_i' = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x(t), u(t)) p_j - \frac{\partial r}{\partial x_i}(x(t), u(t)), \qquad p_i(T) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(x(T)).$$

To je lineární rovnice a má tedy – pro daná $x(t)$, $u(t)$ – jediné řešení $p(t)$ na intervalu $[0, T]$.

Příklad 6. Národní hospodářství se řídí rovnicí

$$x' = kxu,$$

kde x je celkový kapitál, $k > 0$ je konstanta vyjadřující přirozenou míru růstu, a

$$u : (0, T) \to [0, 1]$$

vyjadřuje procento reinvestic, tj. $1-u$ je část produkce, která je spotřebována. Cílem je volit u takové, aby *celková* spotřeba

$$P[u(\cdot)] = \int_0^T (1 - u(t)) x(t)\, dt$$

byla maximální. Čas $T > 0$ je pevně dán; hodnota $x(T)$ může být libovolná.

Řešení. Ve smyslu zavedeného značení je Hamiltonián roven

$$H = x\big(1 + a(pk - 1)\big).$$

Pontrjaginův princip maxima tedy říká, že v případě optimálního řešení

$$x(t)\big(1 + u(t)(p(t)k - 1)\big) = \max_{\eta \in [0,1]} x(t)\big(1 + \eta(p(t)k - 1)\big).$$

Je rozumné předpokládat $x(0) > 0$, odtud $x(t) > 0$ pro každé $t \geq 0$. Stačí tedy maximalizovat druhou závorku; odsud dedukujeme, že optimální řízení splňuje

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } p(t)k < 1, \\ 1, & \text{pokud } p(t)k > 1. \end{cases}$$

Nyní je třeba určit řešení adjungované úlohy. Protože $\frac{d}{dx}H = 1 + a(pk - 1)$, jde o rovnici

$$p' = \begin{cases} -1, & \text{pokud } p(t)k < 1, \\ -pk, & \text{pokud } p(t)k > 1. \end{cases}$$

Pro naši úlohu je $g = 0$, tedy příslušná koncová podmínka je

$$p(T) = 0.$$

Nyní (postupem pozpátku od $t = T$) dopočítáme, že

$$p(t) = \begin{cases} T - t, & t \in [T - \frac{1}{k}, T], \\ \exp\big(k(T-t) - 1\big), & t < T - \frac{1}{k}. \end{cases}$$

Celkem dostáváme: pokud $\frac{1}{k} < T$, je optimální volit $u = 1$ pro $t \in [0, T - \frac{1}{k}]$ a $u = 0$ pro $t \in [T - \frac{1}{k}, T]$. V případě $\frac{1}{k} \geq T$ volíme vždy $u = 0$.

Příklad 7. Uvažujme rovnici $x' = x/u$, $x(0) = 1$. Nalezněte nutnou podmínku na $u : [0, T] \to [1, 3]$, aby $P[u(\cdot)] = \int_0^3 x(t)u(t)dt$ bylo maximální.

Řešení. Hamiltonián je $H = x(p/u + u)$. Z linearity rovnice pro x a počáteční podmínky plyne, že $x(t) > 0$; tedy podmínku maxima lze napsat jako

$$\frac{p(t)}{u(t)} + u(t) = \max_{a \in [1,3]} \frac{p(t)}{a} + a.$$

Vyšetřeme průběh funkce $h(a) = \frac{p_0}{a} + a$, $a > 0$, v závislosti na $p_0 \in \mathbb{R}$. Pro $p_0 \leq 0$ je $h(a)$ striktně rostoucí. Pro $p_0 > 0$ je ryze konvexní s globálním minimem v bodě $a = \sqrt{p_0}$. V obou případech je maximum vůči $a \in [1, 3]$ v jednom z krajních bodů intervalu. Dosazením lehce spočteme, že pro $p_0 > 3$ je $a_{max} = 1$, zatímco pro $p_0 < 3$ je $a_{max} = 3$.

Z principu maxima tedy dostáváme, že $u(t) = 1$ pokud $p(t) > 3$, zatímco $u(t) = 3$ pro $p(t) < 3$.

Adjungovaná rovnice má tvar

$$p' = -\frac{p}{u(t)} - u(t), \qquad p(3) = 0,$$

neboť $g = 0$. Řešení sestrojíme opět „odzadu". Označme

$$t_0 = \inf\big\{t \in [0,3];\ p < 3 \text{ na } [t,3]\big\}.$$

Ze spojitosti je $t_0 < 3$ a patrně $p(t) < 3$ a tedy $u(t) = 3$ na $(t_0, 3]$. Máme tedy rovnici $p' = -p/3 - 3$, jež má obecné řešení $p = ce^{-t/3} - 9$. Z podmínky $p(3) = 0$ plyne $c = 9e$. Celkem máme

$$p = 9e^{1-t/3} - 9, \quad t \in (t_0, 3]. \tag{23}$$

Z definice t_0 dále plyne, že $p(t_0+) = 3$, nebo $t_0 = 0$. Funkce (23) nabývá hodnoty 3 v bodě $t = 3 - 3\ln 4/3 > 0$, tedy nutně

$$t_0 = 3 - 3\ln 4/3. \tag{24}$$

Na intervalu $[0, t_0)$ je p patrně klesající a kladná; tedy speciálně zde máme $p > 3$ a $u = 1$. Adjungovaná rovnice přechází na $p' = -p - 1$. Obecné řešení je $p = ce^{-t} - 1$, z podmínky $p(t_0) = 3$ máme $c = 4(3/4)^3 e^3$. Shrnuto

$$p = 4\left(\frac{4}{3}\right)^3 e^{3-t} - 1, \quad t \in [0, t_0). \tag{25}$$

Podstatná je ovšem informace ohledně optimálního řízení, tedy $u = 1$ na $(0, t_0)$ a $u = 3$ na $(t_0, 3)$. – Zdůrazněme, že jsme pouze ukázali, že existuje-li optimální řízení, má nutně tento tvar. Existence maxima (vzhledem k nelinearitě úlohy) je netriviální problém. Odtud již snadno dopočteme i hodnoty řešení: $x = e^t$ pro $t \in [0, t_0]$ a $x = \frac{16}{9}e^{2+t/3}$ pro $t \in [t_0, 3]$.

Řešte úlohy na Pontrjaginův princip maxima.

21. Závaží na pružině se řídí rovnicí $x'' + x = u$. Najděte sílu $u : [0, +\infty) \to [-1, 1]$ takovou, že $x = x' = 0$ nastane v nejkratším čase.

22. Policejní vůz se řídí rovnicí $x' = u$, $x(0) = 0$. Určete tah motoru $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ tak, aby $P[u(\cdot)] = -\int_0^T (x(t) - z(t))^2 + \alpha u^2(t) dt$ bylo maximální. Čas $T > 0$, konstanta $\alpha > 0$ a trajektorie zločince $z(t)$ je dána. – Řešte obecně a pak pro případ (i) $z(t) = 1$, (ii) $z(t) = t$ a (iii) $z(t) = \cos t$, $\alpha = 1$, $T = 2\pi$.

23. Je dána rovnice $x' = x + u$. Určete $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ tak, aby $P[u(\cdot)] = -\int_0^T x^2(t) + u^2(t) dt$ bylo maximální. * Hledejte regulaci ve tvaru zpětné vazby, tj. odvoďte rovnici pro c, kde $u(t) = a(t)x(t)$.

24. Maximalizujte $P[u(\cdot)] = \int_0^2 2x(t) - 3u(t) dt$, kde $x' = x + u$, $x(0) = 4$ a $u : [0, T] \to [0, 2]$.

25. Maximalizujte $P[u(\cdot)] = \int_0^4 3x(t) dt$, kde $x' = x + u$, $x(0) = 5$ a $u : [0, T] \to [0, 2]$.

26. Maximalizujte $P[u(\cdot)] = \int_0^2 x(t) - u^2(t) dt$, kde $x' = u$, $x(0) = 0$ a $u : [0, T] \to \mathbb{R}$.

27. Maximalizujte $P[u(\cdot)] = -\frac{1}{2} \int_0^1 x^2(t) + u^2(t) dt$, kde $x' = u - x$, $x(0) = 1$ a $u : [0, T] \to \mathbb{R}$.

Řešení.

21) Převedením na systém máme tvar (14), kde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Existence optimální regulace je zaručena Větami 4, 5. Princip maxima dává

$$(-h_1 \sin t + h_2 \cos t) u(t) = \max_{|\eta| \le 1} (-h_1 \sin t + h_2 \cos t) \eta,$$

pro vhodný nenulový vektor (h_1, h_2). Lze psát $(h_1, h_2) = (a \sin \omega, a \cos \omega)$, kde $a > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$. Odsud $\max_\eta \eta a \cos(t + \omega)$; vidíme, že optimální u mění hodnotu 1 a -1 s periodou π, přesněji

$$u(t) = \operatorname{sgn} \cos(t + \omega). \tag{26}$$

Pro $u = \pm 1$ jsou řešení kružnice (v rovině (x, x')) o středech $(\pm 1, 0)$. Lze si rozmyslet, že pro každou počáteční podmínku existuje jediná optimální regulace ve tvaru (26).

22) Hamiltonián $H = pu - \alpha u^2$ má jediné maximum pro $u = p/2\alpha$. V optimálním případě máme tedy $x' = p/2\alpha$, $x(0) = 0$; adjungovaná úloha je $p' = 2x - 2z$, $p(T) = 0$. To lze převést na jedinou rovnici

$$x'' - \frac{x}{\alpha} = -\frac{z}{\alpha}, \qquad x(0) = 0,\ x'(0) = c,$$

kde c určíme tak, aby $x'(T) = 0$ ($\iff$ $p(T) = 0$). Pro uvedené konkrétní hodnoty máme za prvé

$$x = 1 - \cosh(t/\sqrt{\alpha}) + c\sqrt{a} \sinh(t/\sqrt{\alpha}) \tag{i}$$

odsud $c = \tanh(T/\sqrt{\alpha})$. Ve druhém případě

$$x = t - \sqrt{\alpha}(c - 1) \sinh(t/\sqrt{\alpha}); \tag{ii}$$

odsud $c - 1 = 1/\cosh(T/\sqrt{\alpha})$. Konečně zatřetí

$$x = \frac{\cos t}{2} + \frac{2c - 1}{4} e^t + \frac{2c + 1}{4} e^{-t}; \tag{iii}$$

odsud $c = \tanh(2\pi)/2$.

23) Hamiltonián $H = px - x^2 + pu - u^2$ má jediné maximum pro $u = p/2$. Adjungovaná úloha má tvar $p' = 2x - p$, $p(T) = 0$. Je tedy nutno nalézt řešení soustavy

$$x' = x + p/2, \qquad x(0) = x_0,$$
$$p' = 2x - p, \qquad p(0) = p_0,$$

kde p_0 volíme tak, aby $p(T) = 0$. Zpětná vazba: označme $d(t) = p(t)/x(t)$, tj. $c(t) = d(t)/2$. Rovnice pro $d(t)$ je po dosazení

$$d' = 2 - 2d - \frac{d^2}{2}, \qquad d(T) = 0.$$

Její řešení najdeme konečně ve tvaru $d(t) = 2b'(t)/b(t)$, kde pomocná funkce $b(t)$ splňuje rovnici

$$b'' + 2b' - b = 0, \qquad b(T) = 1,\ b'(T) = 0,$$

kterou již umíme řešit.

24) $u = 2$, $x = 6e^t - 2$ na $[0, t_0]$; $u = 0$, $x = (6 - 2e^{-t_0})e^t$ na $[t_0, 2]$, kde $t_0 = 2 - \ln(5/2)$.

25) $u = 2$, $x = 7e^{-t} - 2$ na $[0, 4]$.

26) $u = -t/2 + 1$, $x = -t^2/4 + t$ na $[0, 2]$.

27) $u = c_1(\sqrt{2} + 1)e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t}$, $x = -c_2(\sqrt{2} + 1)e^{-\sqrt{2}t} + c_1 e^{\sqrt{2}t}$, kde c_1, c_2 volíme tak, aby $x(0) = 1$ a $u(1) = 0$.