Řešení

28) Fundamentální systém je e^t, te^t. Hledáme řešení $y(t) = ae^t + bte^t$ splňující $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. To je řešení te^t. Řešení nehomogenní rovnice tedy jsou

$$y(t) = ce^t + dte^t + \int_0^t (t-s)e^{t-s} f(s)ds.$$

29) $y(t) - \tilde{y}(t) = (e^t - te^t) - (e^t/2 - te^t/2)$, tj. pro $t = 1$ máme $|\frac{1}{2}e^5 - \frac{5}{2}e^5| = 2e^5$.

30) $y(t) - \tilde{y}(t) = \int_0^t (t-s)e^{t-s}(s - \sin s)ds$, tj. pro $t = 1$ máme $3 - e - \frac{1}{2}\cos 1$.

31) Buď $f(t) := x''(t) - x(t) \geq 0$. Pak $x(t) = ce^t + de^{-t} + \int_0^t \frac{1}{2}(e^{t-s} - e^{s-t})f(s)ds \geq 0$ a z počátečních podmínek $c > 0$ a $c + d \geq 0$. Odtud už snadno plyne tvrzení.

32) Buď $f(t) := x''(t) + x(t) \geq 0$. Pak $x(t) = \sin t + x(0)\cos t + \int_0^t \sin(t - s)f(s)ds \geq 0$, pokud $x(0) = 0$. Pokud $x(0) > 0$ a $f(t) \equiv 0$, pak $x(t) < 0$ na $(\pi/2, \pi)$.

33) Označme $f(t) := e^{-t}(x'''(t) - x'(t))$, pak

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 + c_2e^t + c_3e^{-t} + \int_0^t \frac{1}{2}(e^{t-s} + e^{s-t} - 2)e^s f(s)ds \\ &= c_1 + c_2e^t + c_3e^{-t} + e^t \int_0^t \frac{1}{2}(1 + e^{2s-2t} - e^{s-t})f(s)ds \end{aligned}$$

Funkce $1 + e^{2s-2t} - e^{s-t}$ nabývá minima $1 + 1/4 - 1/2 = 3/4$, máme

$$x(t) \geq e^t(c_2 + \frac{3}{8}\int_0^t f(s)ds - \varepsilon)$$

a protože f je zdola omezená, také závorka v posledním výrazu se blíží k $+\infty$.

34) Buď $f(t) := x'''(t) - x'(t)$, pak

$$x(t) = c_1 + c_2e^t + c_3e^{-t} + \int_0^t \frac{1}{2}(e^{t-s} + e^{s-t} - 2)f(s)ds$$

Pokud např. $f(t) = t$, máme

$$x(t) = c_1 + c_2e^t + c_3e^{-t} + e^t + e^{-t} - 2 - t^2 \to -\infty,$$

pokud $c_2 \leq -1$.

35) Řešení rovnice bude $y(t) = (2e^t - e^{2t})y_0 + \int_0^t (e^{2t-2s} - e^{t-s})sds$, tj. $y(t) - \tilde{y}(t) = (2e^t - e^{2t})(y_0 - \tilde{y}_0) \le 1$. Z tvaru funkce $|2e^t - e^{2t}|$ plyne, že nabývá maxima v bodě 10, tj. $|y_0 - \tilde{y}_0| \le (e^{20} - 2e^{10})^{-1}$.

36) Ihned z integrálního tvaru variace konstant

$$|y_1 - y_2| \le \int_0^t |\sin(t-s)|\, |f_1(s) - f_2(s)| ds.$$

37) Homogenní soustava s konstantními koeficienty je autonomní, tedy je-li $t \mapsto \Phi(t)C$ řešení, pak i $t \mapsto \Phi(s+t)C$ je řešení. Toto řešení má v čase 0 hodnotu $\Phi(s)C$, tj. musí platit $\Phi(s+t)C = \Phi(t)\Phi(s)C$ pro všechna C. Odtud $\Phi(t)\Phi(s)^{-1} = \Phi(t-s)$ pro $s \le t$.

38) Vydělme nejprve rovnici (10) číslem a_0. Je třeba ukázat, že fundamentální matice Φ pro rovnici n-tého řádu má na pozici $(\Phi)_{1n}$ funkci ω z Věty 4, je-li Φ ta fundamentální matice, která je pro $t = 0$ rovna identitě. Taková fundamentální matice musí mít v posledním sloupci právě řešení, jehož hodnoty v nule odpovídají hodnotám funkce ω.

39) Zbývá ukázat, že funkce $f : t \mapsto e^{tA}\left(Y_0 - \int_0^t e^{-sA} b(s) ds\right)$ pro Y_0 definované v Příkladu je omezená. Platí

$$f(t) = \int_t^{+\infty} e^{(t-s)A} b(s) ds = \int_0^{+\infty} e^{-sA} b(t+s) ds,$$

tedy $|f(t)| \le \sup b \cdot \int_0^{+\infty} e^{-sA} ds < C < +\infty$.

40) (a) Definujme x_{n+1} jako řešení rovnice $Y = AY + F(x_n)$ s danou počáteční podmínkou. Z variace konstant plyne

$$e^{tA} \|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \le \int_{t_0}^t e^{sA} L \|x_n(s) - x_{n-1}(s)\| ds.$$

Na intervalu menším než $(t_0 - 1/L, t_0 + 1/L)$ je zobrazení $\Phi : e^{tA} x_n \mapsto e^{tA} x_{n+1}$ kontrakce v suprémové normě. Řešení tedy existuje na každém podintervalu, a tudíž také na $(t_0 - 1/L, t_0 + 1/L)$.
(b) Ukažte, že zobrazení $\Phi : e^{t(A-L)} x_n \mapsto e^{t(A-L)} x_{n+1}$ je pro dost velké (resp. malé) $L \in \mathbb{R}$ kontrakce v suprémové normě na $(t_0, +\infty)$ (resp. $(-\infty, t_0)$).

41) (a) máme $1 \in \sigma(e^{SA})$, právě když $2i\pi/S \in \sigma(A)$, právě když $\sin(2\pi/S)$ je řešením homogenní rovnice.
(b) Z variace konstant máme $Y(t) = e^{nTA} e^{\sigma A} y_0 + \int_0^{nT+\sigma} e^{sA} b(nT + \sigma - s)$, kde $t = nT + \sigma$, $\sigma \in [0, T)$. Rozdělíme-li integrál na intervaly $(0, \sigma)$, $(\sigma, T + \sigma)$,

$\ldots$, $((n-1)T+\sigma, nT+\sigma)$, dostaneme

$$Y(t) = e^{\sigma A}C^n y_0 + \int_0^\sigma e^{sA}b(\sigma - s)ds + e^{\sigma A}\sum_{k=1}^n C^{k-1}\int_0^T e^{sA}b(-s)ds,$$

kde $C = e^{TA}$. Pokud $1 \notin \sigma(C)$, platí $\sum_1^n C^{k-1} = (C^n - I)(C-I)^{-1}$, tedy dostáváme požadovaný tvar, kde $F(t) = e^{tA}$ a $f(t) = \int_0^\sigma e^{sA}b(\sigma - s)ds$ na $[0,T)$ a T-periodicky rozšířená na $\mathbb{R}$ a $d = (C-I)^{-1}\int_0^T e^{sA}b(-s)ds$.
(c) Protože $F(t)C^n = e^{tA}$, plyne z (a) a (b), že jediné T-periodické řešení získáme pro $y_0 = -d$.