Lineární rovnice s konstantními koeficienty

Definice. Rovnice

$$b_0 y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \cdots + b_n y = f(x)\,, \tag{1}$$

kde $b_j \in \mathbb{C}$ jsou konstanty ($b_0 \neq 0$), se nazývá lineární obyčejná diferenciální rovnice řádu n s konstantními koeficienty. Je užitečné označit jako $\mathscr{K}[y]$ operátor na levé straně, tj.

$$\mathscr{K}[y] = \sum_{k=0}^{n} b_k y^{(n-k)}.$$

Homogenní úloha

Definice. Rovnice s nulovou pravou stranou

$$\mathscr{K}[y] = 0 \tag{2}$$

se nazývá homogenní úloha.

Poznámka. Hlavní myšlenka teorie rovnic s konstantními koeficienty je tato: hledejme řešení ve tvaru $y(x) = \exp(\lambda x)$. Pozorujeme, že $\mathscr{K}[\exp(\lambda x)] = p(\lambda)\exp(\lambda x)$, kde

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} b_k \lambda^{n-k}\,. \tag{3}$$

Tedy: je-li λ_0 kořenem polynomu $p(\lambda)$, je funkce $\exp(\lambda_0 x)$ řešením homogenní úlohy.

Definice. Polynom (3) se nazývá charakteristický polynom rovnice (1).

Věta 1 (Fundamentální systém.)**.** *Je dán operátor $\mathscr{K}[y]$ a $p(\lambda)$ je jeho charakteristický polynom. Nechť λ_j, $j = 1, \ldots, s$, jsou jeho kořeny, kde n_j, $j = 1, \ldots s$, jsou odpovídající násobnosti. Potom funkce*

$$x^l \exp(\lambda_j x) \qquad j = 1, \ldots s,\ l = 0, \ldots n_j - 1$$

tvoří fundamentální systém homogenní úlohy (2)*.*

Příklad 1. Uvažujeme homogenní rovnici

$$y^{(5)} - y^{(4)} - 5y^{(3)} + y'' + 8y' + 4y = 0.$$

Charakteristický polynom je

$$p(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^4 - 5\lambda^3 + \lambda^2 + 8\lambda + 4 = (\lambda+1)^3(\lambda-2)^2.$$

Tedy -1 je trojnásobný, 2 je dvojnásobný kořen; fundamentální systém lze napsat ve tvaru

$$\big\{\exp(-x), x\exp(-x), x^2\exp(-x), \exp(2x), x\exp(2x)\big\}.$$

Připomeňme, že obecné řešení homogenní úlohy je lineární kombinace funkcí z fundamentálního systému:

$$K_1\exp(-x) + K_2 x\exp(-x) + K_3 x^2\exp(-x) + K_4\exp(2x) + K_5 x\exp(2x),$$

kde $K_i \in \mathbb{R}$ jsou konstanty.

Poznámka. V případě, že $p(\lambda)$ má komplexní kořeny, máme dvě možnosti:

1. možnost: celou teorii uvažujeme „komplexní“, tj. hledáme řešení $y(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, počáteční podmínka $y^{(j-1)}(x_0) = \eta_j$, $j = 1, \ldots, n$, kde $\eta_j \in \mathbb{C}$. Vše funguje; koeficienty b_k mohou být také komplexní.

2. možnost: chceme „reálnou“ variantu, tj. hledáme jen řešení $y(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a předpokládáme $b_k \in \mathbb{R}$ (reálné koeficienty v rovnici.)

Z reálnosti b_k plynou dvě věci:

(i) $\lambda \in \mathbb{C}$ je kořen $p(\lambda)$ násobnosti $k \implies \overline{\lambda}$ je kořen násobnosti k

(ii) funkce $y(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ řeší $\mathscr{K}[y] = 0 \implies$ funkce $\operatorname{Re} y(x)$, $\operatorname{Im} y(x)$ řeší $\mathscr{K}[y] = 0$.

Je-li $\lambda = \alpha + i\beta$ kořen násobnosti k, získáme dle Věty 1 funkce

$$\begin{gathered}\exp(\lambda x),\ x\exp(\lambda x),\ \ldots, x^{k-1}\exp(\lambda x),\\ \exp(\overline{\lambda}x),\ x\exp(\overline{\lambda}x),\ \ldots, x^{k-1}\exp(\overline{\lambda}x),\end{gathered}$$

místo nich ale vezmeme jejich reálné a imaginární části (s užitím $\exp(\lambda x) = \exp(\alpha x)[\cos\beta x + i\sin\beta x]$)

$$\begin{gathered}\exp(\alpha x)\cos\beta x,\ x\exp(\alpha x)\cos\beta x,\ \ldots, x^{k-1}\exp(\alpha x)\cos\beta x,\\ \exp(\alpha x)\sin\beta x,\ x\exp(\alpha x)\sin\beta x,\ \ldots, x^{k-1}\exp(\alpha x)\sin\beta x\end{gathered}$$

- tak dojdeme k „reálné“ verzi fundamentálního systému.

Příklad 2. Rovnice $y'' + 6y' + 13 = 0$. Charakteristický polynom $\lambda^2 + 6\lambda + 13$ má kořeny $-3 \pm 2i$. Fundamentální systém tedy je $\{e^{(-3+2i)x}, e^{(-3-2i)x}\}$.

Reálná verze je $\{e^{-3x}\cos 2x, e^{-3x}\sin 2x\}$.

Řešte homogenní rovnice (reálné kořeny).

1. $y'' + 2y' - 3y = 0$

2. $8y'' + 2y' - y = 0$

3. $y'' - (2 + \sqrt{2})y' + 2\sqrt{2}y = 0$

4. $y'' + y' - y = 0$

5. $y''' - 3y'' + 2y' = 0$

6. $9y''' - 12y'' + y' + 2y = 0$

7. $y''' + 5y'' + y' + 5y = 0$

8. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

9. $y'' - 2ay' + a^2y = 0$, $a > 0$

10. $y'' - 64y' + 1024y = 0$

11. $y^{(n)} = 0$

12. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

13. $y''' - 9y'' = 0$

14. $y''' - 4y'' + 4y = 0$

15. $4y''' - 4y'' + y = 0$

16. $y^{(4)} - 3y'' + 2y = 0$

17. $y^{(5)} - 7y^{(4)} + 19y''' - 25y'' + 16y' - 4y = 0$

18. $y^{(4)} - 7y'' + 12y = 0$

19. $y^{(4)} + 2y''' - 2y' - y = 0$

20. $8y^{(4)} - 6y'' + y = 0$

Řešte homogenní úlohy (komplexní kořeny).

21. $y'' + 2y' + 2y = 0$

22. $y'' + 100y = 0$

23. $y'' + 2y' + 3y = 0$

24. $y'' - y' + y = 0$

25. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$

26. $y''' + 2\sqrt{2}y'' + 3y' = 0$

27. $y^{(4)} + 18y'' + 81y = 0$

28. $y^{(8)} - 2y^{(4)} + y = 0$

29. $y'' + 2iy = 0$

30. $y'' - iy' + 2y = 0$

31. $y''' - 3iy'' - y' + 3y = 0$

32. $y'' - 2\sqrt{2}iy'' - 2y = 0$

Najděte řešení s předepsanou počáteční podmínkou.

33. $y'' - 4y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 1.$

34. $y'' + 2y' - 3y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 4.$

35. $y'' + 4y' + 5 = 0,\ y(0) = y'(0) = 2.$

36. $y'' - 6y' + 9y = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 2.$

37. $y'' - 4y' + 7y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$

38. $y'' + 2y' + 2 = 0,\ y(0) = y'(0) = 1.$

39. $y''' - y' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -1.$

40. $y''' + y'' + 25y' + 25 = 0,\ y(0) = y''(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

41. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = -2,\ y''(0) = 1.$

42. $y^{(4)} + 18y'' + 81y = 0,\ y(0) = y''(0) = 0,\ y'(0) = 9,\ y'''(0) = -9.$

43. Najděte všechna řešení rovnice $y''' - 6y'' + 3y' + 10y = 0$, která jsou omezená (i) pro $t \to \infty$; (ii) pro $t \to -\infty$.

44. Najděte všechna řešení rovnice $y^{(4)} + 4y'' = 0$, která (i) jsou omezená pro $t \to \infty$; (ii) mají limitu pro $t \to \infty$; (iii) mají *vlastní* limitu pro $t \to \infty$.

45. Najděte všechna řešení rovnice $y'' - 3y' + 2y = 0$, která (i) splňují $y(0) = y(1)$; (ii) jsou nenulová v $\mathbb{R}$.

Řešte následující (teoretičtější) úlohy.

Poznámka. Uvažujeme pouze reálné koeficienty b_k.

46. Nechť funkce $y(x)$ řeší rovnici (2). Potom funkce $y(x-c)$, $y'(x)$ řeší tutéž rovnici.

47. Nechť funkce $y(x)$ řeší rovnici (2); nechť $z(x)$ je měřitelná funkce, splňující

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |z(x)|e^{\lambda|x|} < \infty$$

pro každé $\lambda > 0$; speciálně nechť $z(x)$ je omezená a má omezený nosič. Potom funkce

$$\big(y * z\big)(x) = \int_{\mathbb{R}} y(x-s)z(s)ds$$

řeší též rovnici (2).

48. Nechť funkce $x^k e^{\lambda x}$ řeší rovnici (2). Potom funkce $x^j e^{\lambda x}$, $j = 0, \dots, k-1$ řeší tutéž rovnici.

49. Funkce $\cos \beta x$ řeší rovnici (2), právě když $\sin(\beta x)$ řeší tutéž rovnici.

50. Nechť funkce x^2+1+e^{-x} řeší rovnici (2). Jaké další funkce nutně řeší tuto rovnici? Jaký je nejmenší řád této rovnice?

51. Nechť funkce $xe^{\alpha x}\cos\beta x$, α, $\beta\neq 0$, řeší rovnici (2). Jaké další funkce nutně řeší tuto rovnici? Jaký je nejmenší řád této rovnice?

52. Uveďte příklad rovnice (co nejmenšího řádu) takové, že $\left\{\cos^2 x, \cosh x\right\}$ jsou prvky fundamentálního systému.

53. Uveďte příklad rovnice (co nejmenšího řádu) takové, že $\sin^4 x$ je prvek fundamentálního systému.

54. Ukažte, že $y(x)=1/(x+1)$ není řešením žádné rovnice (2).

55. Ukažte, že $y(x)=e^{x^2}$ není řešením žádné rovnice (2).

56. Najděte příklad rovnice, jejíž všechna řešení jsou omezená v $\mathbb{R}$. Může být být tato rovnice třetího (obecně lichého) řádu?

57. Najděte příklad rovnice, jejíž všechna řešení jsou sudé funkce.

58. Najděte příklad rovnice, jejíž všechna řešení jsou liché funkce.

Výsledky, nápověda.

1) $y(x)=K_1\,e^{x}+K_2\,e^{-3\,x}$

2) $y(x)=K_1\,e^{1/4\,x}+K_2\,e^{-1/2\,x}$

3) $y(x)=K_1\,e^{2\,x}+K_2\,e^{\sqrt{2}x}$

4) $y(x)=K_1\,e^{1/2\left(\sqrt{5}-1\right)x}+K_2\,e^{-1/2\left(\sqrt{5}+1\right)x}$

5) $y(x)=K_1+K_2\,e^{x}+K_3\,e^{2\,x}$

6) $y(x)=K_1\,e^{x}+K_2\,e^{-1/3\,x}+K_3\,e^{2/3\,x}$

7) $y(x)=K_1\,e^{x}+K_2\,e^{-1/3\,x}+K_3\,e^{2/3\,x}$

8) $y(x)=K_1\,e^{x}+K_2\,e^{2\,x}+K_3\,e^{-x}$

9) $y(x)=c_1e^{ax}+c_2xe^{ax}$

10) $y(x)=K_1\,e^{32\,x}+K_2\,e^{32\,x}x$

11) $y(x)=\sum_{k=0}^{n-1}K_ix^i$

12) $y(x)=K_1\,e^{-x}+K_2\,e^{-x}x^2+K_3\,e^{-x}x$

13) $y(x)=K_1+K_2\,x+K_3\,e^{9\,x}$

14) $y(x)=K_1+K_2\,e^{2\,x}+K_3\,e^{2\,x}x$

15) $y(x)=K_1+K_2\,e^{1/2\,x}+K_3\,e^{1/2\,x}x$

16) $y(x)=K_1\,e^{x}+K_2\,e^{-x}+K_3\,e^{x\sqrt{2}}+K_4\,e^{-x\sqrt{2}}$

17) $y(x)=K_1\,e^{x}+K_2\,e^{2\,x}+K_3\,e^{x}x^2+K_4\,e^{x}x+K_5\,e^{2\,x}x$

18) $y(x) = K_1\, e^{2\,x} + K_2\, e^{-2\,x} + K_3\, e^{x\sqrt{3}} + K_4\, e^{-x\sqrt{3}}$

19) $y(x) = K_1\, e^{x} + K_2\, e^{-x} + K_3\, e^{-x}x + K_4\, e^{-x}x^2$

20) $y(x) = K_1\, e^{1/2\,x} + K_2\, e^{-1/2\,x} + K_3\, e^{1/2\,x\sqrt{2}} + K_4\, e^{-1/2\,x\sqrt{2}}$

21) $y(x) = K_1\, e^{-x}\cos(x) + K_2\, e^{-x}\sin(x)$

22) $y(x) = K_1\, \cos(10\,x) + K_2\, \sin(10\,x)$

23) $y(x) = K_1\, e^{-x}\cos(\sqrt{2}x) + K_2\, e^{-x}\sin(\sqrt{2}x)$

24) $y(x) = K_1\, e^{x/2}\sin(1/2\,\sqrt{3}x) + K_2\, e^{x/2}\cos(1/2\,\sqrt{3}x)$

25) $y(x) = K_1\, e^{x} + K_2\, \cos(2\,x) + K_3\, \sin(2\,x)$

26) $y(x) = K_1 + K_2\, e^{-\sqrt{2}x}\cos(x) + K_3\, e^{-\sqrt{2}x}\sin(x)$

27) $y(x) = K_1\, \sin(3\,x) + K_2\, \cos(3\,x) + K_3\, \cos(3\,x)x + K_4\, \sin(3\,x)x$

28) $y(x) = K_1\, \cos(x) + K_2\, \sin(x) + K_3\, e^{x} + K_4\, e^{-x} + K_5\, \cos(x)x + K_6\, \sin(x)x + K_7\, e^{x}x + K_8\, e^{-x}x$

29) $y(x) = K_1\, \sin((1+i)\,x) + K_2\, \cos((1+i)\,x)$

30) $y(x) = K_1\, e^{2\,ix} + K_2\, e^{-ix}$

31) $y(x) = K_1\, e^{x} + K_2\, e^{-x} + K_3\, e^{3\,ix}$

32) $y(x) = (K_1 + K_2 x)e^{\sqrt{2}ix}$

33) $y = -3/4e^{-2x} - 1/4e^{2x}.$

34) $y = e^{x} - e^{-3x}.$

35) $y = 2e^{-2x}(\cos x + 2\sin x).$

36) $y = e^{3x}(3 - 7x).$

37) $y = e^{2x}\cos\sqrt{3}x.$

38) $y = e^{-x}(2\sin x + \cos x).$

39) $y = 1 - e^{-x}.$

40) $y = 1/5\sin 5x + e^{-x}.$

41) $y = xe^{2x}(9x/2 - 2).$

42) $y = 13/3\sin 3x - 4x\cos 3x.$

43) (i) $y = Ae^{-x}$; (ii) $y = Ae^{2x} + Be^{5x}$.

44) Obecné řešení má tvar $y = A + Bt + C\cos 2t + D\sin 2t$; uvedené podmínky požadují (i) $B = 0$; (ii) $B \neq 0$ nebo $C = D = 0$; (iii) $B = C = D = 0$.

45) Obecné řešení má tvar $y = Ae^{x} + Be^{2x}$; uvedené podmínky požadují (i) $A = B = 0$; (ii) $B = 0$, $A \neq 0$ nebo $B \neq 0$, $AB \geq 0$.

47) Ukažte derivováním podle parametru, že $(y * z)' = (y') * z$.

48) Užijte úlohu 46.

50) 1, x, x^2, e^{-x}. Řád rovnice je alespoň 4.

51) $xe^{\alpha x}\sin\beta x$, $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$. Řád rovnice je alespoň 4.

52) $\cos^2 x = (1+\cos 2x)/2$; charakteristický polynom musí mít kořeny 0, $\pm 2i$, ± 1.

53) $8\sin^4 x = \cos 4x - 4\cos 2x + 3$. Řád rovnice je alespoň 5.

54) Uvažte, že funkce y, y', y'', ..., jsou lineárně nezávislé.

56) Ano, například $y''' + y' = 0$.

57) Pouze rovnice $y' = 0$.

58) Taková rovnice neexistuje.

Rovnice se speciální pravou stranou.

Připomeňme, že $\mathscr{K}[y] = \sum_{k=0}^n b_k y^{(n-k)}$ je lineární diferenciální operátor řádu n s konstantními koeficienty a $p(\lambda) = \sum_{k=0}^n b_k \lambda^{(n-k)}$ je charakteristický polynom.

Definice. Rovnice

$$\mathscr{K}[y] = q(x)\exp(\lambda_0 x)\,, \tag{4}$$

kde $q(x)$ je polynom, se nazývá rovnice se speciální pravou stranou.

Pravá strana je typ funkce, ze kterých umíme sestavit fundamentální systém. Uvidíme, že v této situaci lze řešení uhodnout jako funkci předepsaného tvaru.

Věta 2. *Je dána úloha* (4)*, kde $q(x)$ je polynom stupně m. Nechť $k \geq 0$ vyjadřuje násobnost λ_0 coby kořene charakteristického polynomu ($k = 0$ pokud λ_0 není kořen.)*

Potom existuje jednoznačně určený polynom $r(x)$ stupně m takový, že $y(x) = x^k r(x)\exp(\lambda_0 x)$ je řešení (4).

Příklad 3. Najděte partikulární řešení rovnice $y'' - y' - 2y = (x+1)\exp(2x)$.

Řešení. Charakteristický polynom $\lambda^2 - \lambda - 2$ má $\lambda_0 = 2$ coby jednoduchý kořen, stupeň $q(x) = x+1$ je 1. Předchozí věta zaručuje existenci řešení ve tvaru $y_p(x) = xr(x)\exp(2x)$, kde $r(x)$ je polynom stupně 1. Tedy $r(x) = Ax + B$, celkově

$$y_p(x) = (Ax^2 + Bx)\exp 2x.$$

Derivujeme

$$y_p'(x) = \big\{2Ax^2 + (2A+2B)x + B\big\} \exp 2x,$$
$$y_p''(x) = \big\{4Ax^2 + (8A+4B)x + 2A + 4B\big\} \exp 2x.$$

Dosadíme do původní rovnice. Výrazy obsahující $x^2 \exp 2x$ se navzájem vyruší; protože funkce $\exp 2x$ a $x \exp 2x$ jsou lineárně nezávislé, je nutné (a stačí), aby se nulovaly u nich stojící koeficienty. Obdržíme tak rovnice

$$2A + 3B = 1, \qquad 6A = 1.$$

Odsud snadno $A = 1/6$, $B = 2/9$. Partikulární řešení má tedy tvar $y_p = (\frac{x^2}{6} + \frac{2x}{9}) \exp 2x$.

Věta 3 (Komplexní verze.)**.** *Je dána úloha*

$$\mathscr{K}[y] = \exp(\alpha x)\big[q_1(x)\cos\beta x + q_2(x)\sin\beta x\big]\,, \tag{5}$$

kde q_1, q_2 jsou polynomy stupně nejvýše m. Nechť $k \geq 0$ vyjadřuje násobnost čísla $\lambda = \alpha + \beta i$ coby kořene charakteristického polynomu.

Potom existují jednoznačně určené polynomy r_1, r_2 stupně nejvýše m takové, že

$$y(x) = x^k \exp(\alpha x)[r_1(x)\cos\beta x + r_2(x)\sin\beta x]$$

je řešení (5)*.*

Příklad 4. Najděte partikulární řešení rovnice $y'' + y' - y = x\cos x$.

Řešení. Jde o typ (5), $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $q_1 = x$, $q_2 = 0$, tj. $m = 1$. Číslo $\lambda = 2i$ *není* kořen charakteristického polynomu, tedy $k = 0$.

Dle předchozí věty existuje řešení ve tvaru $y_p(x) = (Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x$. Derivujeme:

$$y_p'(x) = \big\{2Cx + (A+2D)\big\}\cos 2x + \big\{-2Ax + (-2B+C)\big\}\sin 2x,$$
$$y_p''(x) = \big\{-4Ax + (-4B+4C)\big\}\cos 2x + \big\{-4Cx + (-4A-4D)\big\}\sin 2x.$$

Dosadíme do rovnice. Koeficienty u (lineárně nezávislých) funkcí $\cos 2x$, $x\cos 2x$, $\sin 2x$, $x\sin 2x$ se musí nulovat, což vede na soustavu

$$\begin{aligned} A - 5B + 4C + 2D &= 0,\\ -5A + 2C &= 1,\\ -4A - 2B + C - 5D &= 0,\\ -2A - 5C &= 0. \end{aligned}$$

Vychází $A = -5/29$, $B = 59/841$, $C = 2/29$, $D = 104/841$. Partikulární řešení je tedy

$$y_p(x) = \Big(\frac{-5x}{29} + \frac{59}{841}\Big)\cos 2x + \Big(\frac{2x}{29} + \frac{104}{841}\Big)\sin 2x.$$

Poznámka. Příklad ukazuje, že předchozí větu nelze zjednodušit v tom smyslu, že pokud pravá strana obsahuje například jenom funkci $\cos 2x$, pak existuje partikulární řešení, obsahující také jenom funkci $\cos 2x$.

Příklad 5. Najděte partikulární řešení rovnice $y''' - 2y'' + 2y' = 20\sin^2\frac{x}{2}$.

Řešení. Díky vzorečku $\sin^2 y = \frac{1}{2}(1 - \cos 2y)$ rozložíme pravou stranu na dvě části

$$20\sin^2\frac{x}{2} = 10 - 10\cos x = f_1(x) + f_2(x),$$

které jsou už ve speciálním tvaru. Vzhledem k linearitě rovnice můžeme totiž hledat partikulární řešení pro f_1 a f_2 zvlášť.

Charakteristický polynom je $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda$ s jednoduchými kořeny 0 a $1 \pm i$. Pro f_1 hledáme tedy řešení ve tvaru $y_{p1} = Ax$, dosazením vychází $A = 5$. Pro f_2 volíme $y_{p2} = A\cos x + B\sin x$, dosazením vychází $A = -4$, $B = -2$. Partikulární řešení má tedy tvar

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} = 5x - 4\cos x - 2\sin x.$$

Najděte partikulární řešení rovnic se speciální pravou stranou.

59. $y''' + y'' + y = e^x$

60. $y''' + y'' + y = xe^x$

61. $y''' + y'' - 2y = (x+1)e^x$

62. $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}$

63. $y''' + y'' + y' + y = x^3 + x^2 + x + 1$

64. $y''' + y'' = x^3 + x^2$

65. $y^{(4)} - 2y'' + y = (4x - 8)e^{-x}$

66. $y'' + 2y' - 2y = 0$

67. $y''' + 2y' + y = (x^2 - 4x)e^{-x}$

68. $y''' - 3y'' + 4y = e^{2x}$

69. $y''' + 4y'' - 3y' - 18y = e^{2x}$

70. $y'' + y' + y = e^x\cos x$

71. $y'' - y' + y = \cos x - \sin x$

72. $3y'' + y = e^{-x}\big(\sin x - 6\cos x\big)$

73. $y'' - y' + 3 = e^{2x}\big(\cos x - x\sin x\big)$

74. $y' - 5y = 4e^{3x}\big(x^2\cos 2x + \sin 2x\big)$

75. $y^{(6)} - y^{(4)} + y = \cos 2x$

76. $y^{(4)} + 8y'' - y' = \cos 3x - \sin 3x$

77. $y'' + 3y = \sin\sqrt{3}x + 3\cos\sqrt{3}x$

78. $y'' + \omega^2 y = a\cos\omega x + b\sin\omega x$

79. $y'' + 2y' + 10y = e^{-x}\cos 3x$

80. $y'' + 2y' + 10y = e^{-x}\big(\cos 3x - x\sin 3x\big)$

81. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}\big(3\cos 2x - \sin 2x\big)$

82. $y'' - 4y' + 4y = x^2 + 2e^{2x}$

83. $y''' - y'' + 4y' - 4y' = 40\cos^2 x$

84. $y^{(4)} - y^{(3)} = \cosh 2x$, $(y_p = A\cosh 2x + B\sinh 2x)$

85. $y''' + y'' - y' - y = 4\cos^3 x$

86. $y''' + 3y'' + y' = x^2(e^{-x} + x)$

87. $y^{(4)} + 16y = 2x\sin^2 2x$

88. $y^{(3)} - y'' = 2\cosh x\cos x$

89. $*$ $y'' + 5y' + y = \frac{1}{1-e^{-x}}$, $x > 0$. (Rozveďte pravou stranu do řady.)

90. $*$ $y'' + y = \frac{1}{\cosh x}$, $x > 0$. (Rozveďte pravou stranu do řady.)

Výsledky.

59) Ae^x, $\{A = 1/3\}$.

60) $(Ax + B)\,e^x$, $\{A = 1/3, B = -5/9\}$.

61) $x\,(Ax + B)\,e^x$, $\{B = 1/25, A = 1/10\}$.

62) Ax^3e^{-x}, $\{A = 1/6\}$.

63) $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, $\{A = 1, C = -1, D = 0, B = -2\}$.

64) $(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\,x^2$, $\{C = 8, B = -2, A = 3/5, D = -24\}$.

65) $x^2\,(Ax + B)\,e^{-x}$, $\{A = 1/6, B = -1/2\}$.

66) $(Ax^2 + Bx + C)\,e^{-x}$, $\{A = -1/2, B = -1, C = -1/2\}$.

67) $(Ax^2 + Bx + C)\,e^{-x}$, $\{C = 1/4, A = -1/2, B = -1/2\}$.

68) x^2Ae^{2x}, $\{A = 1/6\}$.

69) xAe^{2x}, $\{A = 1/25\}$.

70) $e^x\,(A\cos x + B\sin x)$, $\{A = 2/13, B = 3/13\}$.

71) $A\cos x + B\sin x$, $\{A = -1, B = -1\}$.

72) $e^{-x}\,(A\cos x + B\sin x)$, $\{B = 1, A = 0\}$.

73) $e^{2x}\,((Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x)$, $\{C = 0, A = 1, B = -2, D = 0\}$.

74) $e^{3x}\,((Ax^2+Bx+C)\cos 2x + (Dx^2+Ex+F)\sin 2x)$, $\{B = 0, E = 1, D = 1, A = -1, F = -3/4, C = -3/4\}$.

75) $A\cos 2x + B\sin 2x$, $\left\{A = -\frac{1}{79}, B = 0\right\}$.

76) $A\cos 3x + B\sin 3x$, $\{B = -2/15, A = 1/15\}$.

77) $x\left(A\cos\sqrt{3}x + B\sin\sqrt{3}x\right)$, $\left\{B = 1/2\sqrt{3}, A = -1/6\sqrt{3}\right\}$.

78) $x\,(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$, $\left\{B = \frac{a}{2\omega}, A = -\frac{b}{2\omega}\right\}$.

79) $xe^{-x}\,(A\cos 3x + B\sin 3x)$, $\{B = 0, A = -1/6\}$.

80) $xe^{-x}\,((Ax+B)\cos 3x + (Cx+D)\sin 3x)$, $\{C = 0, D = 1/3, A = 1/2, B = 0\}$.

81) $xe^{2x}\,(A\cos 2x + B\sin 2x)$, $\{B = 3/4, A = 1/4\}$.

82) $y_{p1} = Ax^2 + Bx + C$, $\{A = 1/4, B = 1/2, C = 3/8\}$; $y_{p2} = Ax^2e^{2x}$, $A = 1/2$.

83) $(\lambda-1)(\lambda^2+4)$; $f = 20 + 20\cos 2x$, $y_{p1} = A$, $A = -5$; $y_{p2} = Ax\cos 2x + Bx\sin 2x$, $\{A = -2, B = -1\}$.

84) $\{A = 1/12, B = 1/24\}$.

85) $f = \cos 3x + 3\cos x$, $y_{p1} = A\cos 3x + B\sin 3x$, $\{A = -1/100, B = -3/100\}$; $y_{p2} = A\cos x + B\sin x$, $A = B = -3/4$.

86) $f = x^2e^{-x} + x^3$, $y_{p1} = (Ax^2+Bx+C)e^{-x}$, $\{A = 1, B = 4, C = 8\}$; $y_{p2} = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx$, $\{A = 1/4, B = -3, C = 24, D = -126\}$.

87) $f = x - x\cos 4x$; $y_{p1} = Ax + B$, $\{A = 1/16, B = 0\}$; $y_{p2} = (Ax + B)\cos 2x + (Cx+D)\sin 2x$, $\{A = -1/272, B = C = 0, D = 1/289\}$.

88) $f = e^x\cos x + e^{-x}\cos x$; $y_{p1} = e^x(A\cos x + B\sin x)$, $\{A = -1/2, B = 0\}$; $y_{p2} = e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$, $\{A = 1/10, B = 1/5\}$.

89) $f = \sum_{k\geq 0} e^{-kx}$, $y_p = \sum_{k\geq 0} y_{pk}$, kde $y_{pk} = \frac{e^{-kx}}{(k^2+5k+1)}$.

90) $f = \frac{2e^{-x}}{1+e^{-2x}} = 2\sum_{k\geq 0}(-1)^k e^{-(2k+1)x}$, $y_p = \sum_{k\geq 0} y_{pk}$, kde $y_{pk} = (-1)^k\frac{2}{k^2+1}e^{-(2k+1)x}$.