Rovnice se speciální pravou stranou.

Připomeňme, že $\mathscr{K}[y] = \sum_{k=0}^{n} b_k y^{(n-k)}$ je lineární diferenciální operátor řádu n s konstantními koeficienty a $p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} b_k \lambda^{(n-k)}$ je charakteristický polynom.

Definice. Rovnice

$$\mathscr{K}[y] = q(x)\exp(\lambda_0 x)\,, \tag{4}$$

kde $q(x)$ je polynom, se nazývá rovnice se speciální pravou stranou.

Pravá strana je typ funkce, ze kterých umíme sestavit fundamentální systém. Uvidíme, že v této situaci lze řešení uhodnout jako funkci předepsaného tvaru.

Věta 2. *Je dána úloha (4), kde $q(x)$ je polynom stupně m. Nechť $k \geq 0$ vyjadřuje násobnost λ_0 coby kořene charakteristického polynomu ($k = 0$ pokud λ_0 není kořen.)*

Potom existuje jednoznačně určený polynom $r(x)$ stupně m takový, že $y(x) = x^k r(x)\exp(\lambda_0 x)$ je řešení (4).

Příklad 3. Najděte partikulární řešení rovnice $y'' - y' - 2y = (x+1)\exp(2x)$.

Řešení. Charakteristický polynom $\lambda^2 - \lambda - 2$ má $\lambda_0 = 2$ coby jednoduchý kořen, stupeň $q(x) = x + 1$ je 1. Předchozí věta zaručuje existenci řešení ve tvaru $y_p(x) = xr(x)\exp(2x)$, kde $r(x)$ je polynom stupně 1. Tedy $r(x) = Ax + B$, celkově

$$y_p(x) = (Ax^2 + Bx)\exp 2x.$$

Derivujeme

$$y_p'(x) = \left\{2Ax^2 + (2A + 2B)x + B\right\}\exp 2x,$$
$$y_p''(x) = \left\{4Ax^2 + (8A + 4B)x + 2A + 4B\right\}\exp 2x.$$

Dosadíme do původní rovnice. Výrazy obsahující $x^2 \exp 2x$ se navzájem vyruší; protože funkce $\exp 2x$ a $x\exp 2x$ jsou lineárně nezávislé, je nutné (a stačí), aby se nulovaly u nich stojící koeficienty. Obdržíme tak rovnice

$$2A + 3B = 1, \qquad 6A = 1.$$

Odsud snadno $A = 1/6$, $B = 2/9$. Partikulární řešení má tedy tvar $y_p = (\frac{x^2}{6} + \frac{2x}{9})\exp 2x$.

Věta 3 (Komplexní verze.). *Je dána úloha*

$$\mathscr{K}[y] = \exp(\alpha x)\big[q_1(x)\cos\beta x + q_2(x)\sin\beta x\big]\,, \tag{5}$$

kde q_1, q_2 jsou polynomy stupně nejvýše m. Nechť $k \geq 0$ vyjadřuje násobnost čísla $\lambda = \alpha + \beta i$ coby kořene charakteristického polynomu.

Potom existují jednoznačně určené polynomy r_1, r_2 stupně nejvýše m takové, že

$$y(x) = x^k \exp(\alpha x)[r_1(x)\cos\beta x + r_2(x)\sin\beta x]$$

je řešení (5).

Příklad 4. Najděte partikulární řešení rovnice $y'' + y' - y = x\cos x$.

Řešení. Jde o typ (5), $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $q_1 = x$, $q_2 = 0$, tj. $m = 1$. Číslo $\lambda = 2i$ *není* kořen charakteristického polynomu, tedy $k = 0$.

Dle předchozí věty existuje řešení ve tvaru $y_p(x) = (Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x$. Derivujeme:

$$y_p'(x) = \big\{2Cx + (A + 2D)\big\}\cos 2x + \big\{-2Ax + (-2B + C)\big\}\sin 2x,$$
$$y_p''(x) = \big\{-4Ax + (-4B + 4C)\big\}\cos 2x + \big\{-4Cx + (-4A - 4D)\big\}\sin 2x.$$

Dosadíme do rovnice. Koeficienty u (lineárně nezávislých) funkcí $\cos 2x$, $x\cos 2x$, $\sin 2x$, $x\sin 2x$ se musí nulovat, což vede na soustavu

$$\begin{aligned} A - 5B + 4C + 2D &= 0,\\ -5A + 2C &= 1,\\ -4A - 2B + C - 5D &= 0,\\ -2A - 5C &= 0. \end{aligned}$$

Vychází $A = -5/29$, $B = 59/841$, $C = 2/29$, $D = 104/841$. Partikulární řešení je tedy

$$y_p(x) = \Big(\frac{-5x}{29} + \frac{59}{841}\Big)\cos 2x + \Big(\frac{2x}{29} + \frac{104}{841}\Big)\sin 2x.$$

Poznámka. Příklad ukazuje, že předchozí větu nelze zjednodušit v tom smyslu, že pokud pravá strana obsahuje například jenom funkci $\cos 2x$, pak existuje partikulární řešení, obsahující také jenom funkci $\cos 2x$.

Příklad 5. Najděte partikulární řešení rovnice $y''' - 2y'' + 2y' = 20\sin^2\frac{x}{2}$.

Řešení. Díky vzorečku $\sin^2 y = \frac{1}{2}(1 - \cos 2y)$ rozložíme pravou stranu na dvě části

$$20 \sin^2 \frac{x}{2} = 10 - 10 \cos x = f_1(x) + f_2(x),$$

které jsou už ve speciálním tvaru. Vzhledem k linearitě rovnice můžeme totiž hledat partikulární řešení pro f_1 a f_2 zvlášť.

Charakteristický polynom je $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda$ s jednoduchými kořeny 0 a $1 \pm i$. Pro f_1 hledáme tedy řešení ve tvaru $y_{p1} = Ax$, dosazením vychází $A = 5$. Pro f_2 volíme $y_{p2} = A \cos x + B \sin x$, dosazením vychází $A = -4$, $B = -2$. Partikulární řešení má tedy tvar

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} = 5x - 4 \cos x - 2 \sin x.$$