

Lineární rovnice s konstantními koeficienty

Definice. Rovnice

$$b_0 y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \dots + b_n y = f(x), \quad (1)$$

kde $b_j \in \mathbb{C}$ jsou konstanty ($b_0 \neq 0$), se nazývá lineární obyčejná diferenciální rovnice řádu n s konstantními koeficienty. Je užitečné označit jako $\mathcal{K}[y]$ operátor na levé straně, tj.

$$\mathcal{K}[y] = \sum_{k=0}^n b_k y^{(n-k)}.$$

Homogenní úloha

Definice. Rovnice s nulovou pravou stranou

$$\mathcal{K}[y] = 0 \quad (2)$$

se nazývá homogenní úloha.

Poznámka. Hlavní myšlenka teorie rovnic s konstantními koeficienty je tato: hledejme řešení ve tvaru $y(x) = \exp(\lambda x)$. Pozorujeme, že $\mathcal{K}[\exp(\lambda x)] = p(\lambda) \exp(\lambda x)$, kde

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^n b_k \lambda^{n-k}. \quad (3)$$

Tedy: je-li λ_0 kořenem polynomu $p(\lambda)$, je funkce $\exp(\lambda_0 x)$ řešením homogenní úlohy.

Definice. Polynom (3) se nazývá charakteristický polynom rovnice (1).

Věta 1 (Fundamentální systém.). *Je dán operátor $\mathcal{K}[y]$ a $p(\lambda)$ je jeho charakteristický polynom. Nechť λ_j , $j = 1, \dots, s$, jsou jeho kořeny, kde n_j , $j = 1, \dots, s$, jsou odpovídající násobnosti. Potom funkce*

$$x^l \exp(\lambda_j x) \quad j = 1, \dots, s, \quad l = 0, \dots, n_j - 1$$

tvoří fundamentální systém homogenní úlohy (2).

Příklad 1. Uvažujeme homogenní rovnici

$$y^{(5)} - y^{(4)} - 5y^{(3)} + y'' + 8y' + 4y = 0.$$

Charakteristický polynom je

$$p(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^4 - 5\lambda^3 + \lambda^2 + 8\lambda + 4 = (\lambda + 1)^3(\lambda - 2)^2.$$

Tedy -1 je trojnásobný, 2 je dvojnásobný kořen; fundamentální systém lze napsat ve tvaru

$$\{ \exp(-x), x \exp(-x), x^2 \exp(-x), \exp(2x), x \exp(2x) \}.$$

Připomeňme, že obecné řešení homogenní úlohy je lineární kombinace funkcí z fundamentálního systému:

$$K_1 \exp(-x) + K_2 x \exp(-x) + K_3 x^2 \exp(-x) + K_4 \exp(2x) + K_5 x \exp(2x),$$

kde $K_i \in \mathbb{R}$ jsou konstanty.

Poznámka. V případě, že $p(\lambda)$ má komplexní kořeny, máme dvě možnosti:

1. možnost: celou teorii uvažujeme „komplexní“, tj. hledáme řešení $y(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, počáteční podmínka $y^{(j-1)}(x_0) = \eta_j$, $j = 1, \dots, n$, kde $\eta_j \in \mathbb{C}$. Vše funguje; koeficienty b_k mohou být také komplexní.

2. možnost: chceme „reálnou“ variantu, tj. hledáme jen řešení $y(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a předpokládáme $b_k \in \mathbb{R}$ (reálné koeficienty v rovnici.)

Z reálnosti b_k plynou dvě věci:

(i) $\lambda \in \mathbb{C}$ je kořen $p(\lambda)$ násobnosti $k \implies \bar{\lambda}$ je kořen násobnosti k

(ii) funkce $y(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ řeší $\mathcal{K}[y] = 0 \implies$ funkce $\operatorname{Re} y(x)$, $\operatorname{Im} y(x)$ řeší $\mathcal{K}[y] = 0$.

Je-li $\lambda = \alpha + i\beta$ kořen násobnosti k , získáme dle Věty 1 funkce

$$\begin{aligned} \exp(\lambda x), x \exp(\lambda x), \dots, x^{k-1} \exp(\lambda x), \\ \exp(\bar{\lambda} x), x \exp(\bar{\lambda} x), \dots, x^{k-1} \exp(\bar{\lambda} x), \end{aligned}$$

místo nich ale vezmeme jejich reálné a imaginární části (s užitím $\exp(\lambda x) = \exp(\alpha x)[\cos \beta x + i \sin \beta x]$)

$$\begin{aligned} \exp(\alpha x) \cos \beta x, x \exp(\alpha x) \cos \beta x, \dots, x^{k-1} \exp(\alpha x) \cos \beta x, \\ \exp(\alpha x) \sin \beta x, x \exp(\alpha x) \sin \beta x, \dots, x^{k-1} \exp(\alpha x) \sin \beta x \end{aligned}$$

- tak dojdeme k „reálné“ verzi fundamentálního systému.

Příklad 2. Rovnice $y'' + 6y' + 13 = 0$. Charakteristický polynom $\lambda^2 + 6\lambda + 13$ má kořeny $-3 \pm 2i$. Fundamentální systém tedy je $\{e^{(-3+2i)x}, e^{(-3-2i)x}\}$.

Reálná verze je $\{e^{-3x} \cos 2x, e^{-3x} \sin 2x\}$.