Aplikace při řešení rovnic.

Laplaceova transformace má tu příjemnou vlastnost, že operaci ,,derivace dle t“ převádí na operaci ,,násobení proměnnou p“.

Věta 3. *Nechť $f(t) \in L^1_+$; nechť navíc $f(t) \in C^1([0,\infty))$ a $f'(t) \in L^1_+$. Potom pro $\operatorname{Re} p > \max\{c_f, c_{f'}\}$*

$$\mathscr{L}\big[f'(t)\big](p) = p\mathscr{L}\big[f(t)\big](p) - f(0).$$

Obecněji, pokud $f^{(k)} \in L^1_+$ pro $k = 0,\dots,n$ a $f \in C^n([0,\infty))$, pak pro $\operatorname{Re} p > \max\{c_f,\dots,c_{f^{(n)}}\}$ je

$$\mathscr{L}\big[f^{(n)}(t)\big](p) = p^n\mathscr{L}\big[f(t)\big](p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k f^{(n-1-k)}(0)\,.$$

Pomocí Laplaceovy transformace tak lze elegantně řešit diferenciální rovnice s konstantními koeficienty (diferenciální rovnice je převedena na algebraický problém), ale také rovnice obsahující konvoluci.

Definice 3. Pro $f(t)$, $g(t)$ definujeme konvoluci $f * g$ předpisem

$$f * g(t) = \int_0^t f(s)g(t-s)\,ds.$$

Věta 4. *Nechť $f(t)$, $g(t) \in L^1_+$. Potom $f * g(t) \in L^1_+$, $c_{f*g} \le \max\{c_f, c_g\}$ a platí*

$$\mathscr{L}\big[f * g(t)\big](p) = \mathscr{L}\big[f(t)\big](p)\cdot\mathscr{L}\big[g(t)\big](p), \qquad \operatorname{Re} p > \max\{c_f, c_g\}.$$

Důsledek. *Je-li $f(t) \in L^1_+$, je také funkce*

$$\phi(t) := \int_0^t f(s)\,ds$$

prvkem L^1_+ a platí

$$\mathscr{L}\big[\phi\big](p) = \frac{1}{p}\mathscr{L}\big[f\big](p), \qquad \operatorname{Re} p > c_f.$$

Příklad 1. Uvažujme soustavu

$$x' = 7x - 2y + 8te^{-t},$$
$$y' = 8x - y,$$

s počáteční podmínkou

$$x(0) = 0, \qquad y(0) = \frac{1}{2}.$$

Aplikujme (zatím čistě formálně) Laplaceovu transformaci; označme $X(p) = \mathscr{L}\big[x(t)\big](p)$, $Y(p) = \mathscr{L}\big[y(t)\big](p)$. Dostáváme rovnice

$$\begin{aligned} pX(p) &= 7X(p) - 2Y(p) + \frac{8}{(p+1)^2}, \\ pY(p) - \frac{1}{2} &= 8X(p) - Y(p). \end{aligned}$$

Odsud

$$\begin{aligned} X(p) &= -\frac{p-7}{(p+1)\,(p-3)^2}, \\ Y(p) &= \frac{p^3 - 5\,p^2 - 13\,p + 121}{2\,(p+1)^2\,(p-3)^2}. \end{aligned}$$

Nyní chceme najít příslušné Laplaceovy vzory těchto funkcí. Rozložme tedy na parciální zlomky:

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{1}{2(p+1)} + \frac{1}{(p-3)^2} - \frac{1}{2(p-3)}, \\ Y(p) &= \frac{4}{(p+1)^2} + \frac{2}{p+1} + \frac{2}{(p-3)^2} - \frac{3}{2(p-3)}. \end{aligned}$$

Nyní stačí uvážit, že $\mathscr{L}\big[e^{at}\big] = \frac{1}{p-a}$, $\mathscr{L}\big[te^{at}\big] = \frac{1}{(p-a)^2}$. Tedy:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}e^{-t} + (t - \frac{1}{2})e^{3t}, \\ y(t) &= (4t+2)e^{-t} + (2t - \frac{3}{2})e^{3t}. \end{aligned}$$

Zatím ovšem nevíme, že toto jsou vskutku řešení. K otázce se vrátíme v závěru oddílu o inverzní Laplaceově transformaci.

Příklad 2. Uvažme obecnou homogenní soustavu

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x},$$

kde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je vektor, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ konstantní matice. Fundamentálním řešením rozumíme matici $U = U(t)$ takovou, že

$$U' = AU, \qquad U(0) = I\,, \tag{1}$$

kde I je jednotková matice. Označme $\Omega(p) = \mathscr{L}\big[U(t)\big]$; Laplaceova transformace se ovšem aplikuje na matici prvek po prvku. Vzhledem k linearitě je lehko odvodit, že $\mathscr{L}\big[AU\big] = A\mathscr{L}\big[U\big]$. Rovnice (1) tedy přejde na

$$p\Omega(p) - I = A\Omega(p),$$

neboli

$$\Omega(p) = (pI - A)^{-1}.$$

Odtud pak dopočteme $U(t)$. Uvažujme například

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\Omega(p) = \begin{pmatrix} \frac{p+2}{p^2+1} & \frac{p-3}{p^3-p^2+p-1} & \frac{1-2p}{p^3-p^2+p-1} \\ \frac{-1}{p^2+1} & \frac{p^2-p+2}{p^3-p^2+p-1} & \frac{p}{p^3-p^2+p-1} \\ \frac{2}{p^2+1} & \frac{2}{p^2+1} & \frac{p-1}{p^2+1} \end{pmatrix}.$$

Podívejme se blíže na druhý člen na prvním řádku. Parciální zlomky jsou

$$\frac{-1}{p-1} + \frac{p+2}{p^2+1}.$$

Připomeňme, že $\mathscr{L}\big[\sin at\big] = \frac{a}{p^2+a^2}$, $\mathscr{L}\big[\cos at\big] = \frac{p}{p^2+a^2}$. Odtud

$$U_{12}(t) = -e^t + \cos t + 2\sin t.$$

Celkem dopočítáme $U(t) =$

$$\begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t, & -e^t + \cos t + 2\sin t, & -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}(\cos t - 3\sin t) \\ \sin t, & e^t - \sin t, & \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) \\ 2\sin t, & 2\sin t, & \cos t - \sin t \end{pmatrix}.$$

Poznámka. Při řešení soustav se často hodí fakt, že inverzní matici lze spočítat pomocí explicitních vzorců:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

a obecněji $A^{-1} = B$, kde $b_{ij} = (\det A)^{-1}(-1)^{i+j}A_{ji}$, přičemž A_{ji} je subdeterminant A, který vznikne vyškrtnutím j-tého řádku a i-tého sloupce.

Příklad 3. Uvažujme rovnici

$$x(t) + \int_0^t e^{3s} x(t-s) ds = \sin 2t, \quad t > 0.$$

Pozorujeme, že druhý člen vlevo je konvoluce funkcí e^{3t} a neznámé funkce $x(t)$. Tedy Laplaceova transformace dává

$$X(p) + X(p)\frac{1}{p-3} = \frac{2}{p^2+4}.$$

Odsud lehce

$$X(p) = \frac{2p-6}{p^3 - 2p^2 + 4p - 8} = \frac{p+10}{4(p^2+4)} - \frac{1}{4(p-2)}.$$

Laplaceův vzor je zjevně

$$x(t) = \frac{5}{2}\sin 2t + \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{4}e^{2t}.$$

Příklad 4. Vyřešme Abelovu rovnici

$$\int_0^t \frac{v(s)ds}{(t-s)^\alpha} = f(t)$$

kde $\alpha \in (0,1)$ a $f(t) \in C^1([0,\infty)) \cap L^1_+$, $f'(t) \in L^1_+$. Protože levá strana je konvolucí neznámé funkce $v(t)$ a $t^{-\alpha}$, Laplaceova transformace dává, s ohledem na Věty 2 a 4

$$V(p)\Gamma(1-\alpha)p^{\alpha-1} = F(p),$$

odsud snadno vyjádříme

$$V(p) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} F(p) p^{1-\alpha}$$

Protože $p^\beta \in \mathscr{L}\big[L^1_+\big]$ pouze pro $\beta < 0$, rozepíšeme pravou stranu jako

$$V(p) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} F(p) p \cdot p^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \Big(\mathscr{L}\big[f'(t)\big](p) - f(0)\Big) \cdot \mathscr{L}\big[t^{\alpha-1}\big](p)$$

Všimněte si triku s přepisem $F(p)p = \mathscr{L}\big[f'(t)\big](p) - f(0)$. Odsud získáme vzoreček pro řešení

$$v(t) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\left\{\frac{f(0)}{t^{1-\alpha}} + \int_0^t \frac{f'(s)ds}{(t-s)^{1-\alpha}}\right\}.$$

Použili jsme Eulerův vzoreček k úpravě součinu Gamma funkcí. Úpravy jsou ekvivalentní; nalezené $v(t)$ je (jediné) řešení ve třídě L^1_+.