Laplaceova transformace

Definice 1. Označme

$$L^1_+ := \left\{ f(t) : (0,\infty) \to \mathbb{R} \text{ měřitelná, a } \exists c \in \mathbb{R} \text{ tak, že } \int_0^\infty |f(t)| e^{-ct}\, dt < \infty \right\}.$$

Funkce z L^1_+ jsou lokálně integrovatelné. Bývá zvykem dodefinovat je nulou pro $t \leq 0$. Pro $f \in L^1_+$ definujeme *abscisu konvergence* jako

$$c_f := \inf \left\{ c \in \mathbb{R};\ \int_0^\infty |f(t)| e^{-ct} < \infty \right\}.$$

Patrně $|f(t)|e^{-ct}$ je integrovatelná funkce pro každé $c > c_f$. Lehce si rozmyslíme, že L^1_+ je vektorový prostor a platí $c_{f+g} \leq \max\{c_f, c_g\}$.

Definice 2. Pro $f(t) \in L^1_+$, definujeme Laplaceovu transformaci funkce $f(t)$ jakožto

$$\mathscr{L}\big[f(t)\big](p) := \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt, \qquad \operatorname{Re} p > c_f.$$

Je zvykem značit $\mathscr{L}\big[f\big] = F$. Zdůrazněme, Laplaceova transformace je operátor, který funkci $f = f(t)$ reálné proměnné t přiřazuje funkci $F = F(p)$ komplexní proměnné p.

Zjevně $f \mapsto \mathscr{L}\big[f\big]$ je lineární operátor v následujícím smyslu: pokud f, $g \in L^1_+$, je

$$\mathscr{L}\big[f+g\big](p) = \mathscr{L}\big[f\big](p) + \mathscr{L}\big[g\big](p), \qquad \operatorname{Re} p > \max\{c_f, c_g\}.$$

Další základní vlastnosti jsou shrnuty v následující větě.

Věta 1. *Nechť $f(t) \in L^1_+$. Potom:*

1. *Pro $a > 0$ je $f(at) \in L^1_+$ a platí*

$$\mathscr{L}\big[f(at)\big](p) = a^{-1} \mathscr{L}\big[f(t)\big](a^{-1}p), \qquad \operatorname{Re} p > ac_f.$$

2. *Pro $a \in \mathbb{R}$ je $e^{at} f(t) \in L^1_+$ a platí*

$$\mathscr{L}\big[e^{at} f(t)\big](p) = \mathscr{L}\big[f(t)\big](p-a), \qquad \operatorname{Re} p > a + c_f.$$

3. *$F(p) = \mathscr{L}\big[f\big](p)$ je holomorfní v množině $\{\operatorname{Re} p > c_f\}$ a platí*

$$F'(p) = \mathscr{L}\big[(-t) f(t)\big](p);$$

obecněji

$$F^{(k)}(p) = \mathscr{L}\big[(-t)^k f(t)\big](p).$$

4. $F(p) \to 0$ *pro* $\operatorname{Re} p \to \infty$, $\operatorname{Im} p$ *pevné a také pro* $\operatorname{Im} p \to \pm\infty$, $\operatorname{Re} p$ *pevné.*

Při aplikaci Laplaceovy transformace je důležité znát obrazy elementárních funkcí. Existují rozsáhlé tabulky jak v knižní, tak elektronické podobě. Nejdůležitější základní vzorečky shrnuje následující věta.

Věta 2. *Nechť* $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. *Funkce* e^{at}, t^n, $\sin at$ *a* $\cos at$ *jsou prvkem* L^1_+ *a platí:*

1.
$$\mathscr{L}\big[e^{at}\big](p) = \frac{1}{p-a}, \qquad \operatorname{Re} p > a.$$
Speciálně $\mathscr{L}\big[1\big](p) = p^{-1}$.

2.
$$\mathscr{L}\big[t^n\big](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \qquad \operatorname{Re} p > 0;$$
obecněji pro každé $\alpha > -1$
$$\mathscr{L}\big[t^\alpha\big](p) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}, \qquad \operatorname{Re} p > 0.$$

3.
$$\mathscr{L}\big[\sin at\big](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \qquad \operatorname{Re} p > 0.$$

4.
$$\mathscr{L}\big[\cos at\big](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \qquad \operatorname{Re} p > 0.$$

Určete abscisu konvergence a nalezněte Laplaceovu transformaci daných funkcí.

1. $f(t) = 1$ pro $t \in (0,a)$ a $f(t) = 0$ jinde.
2. $f(t) = \max\{1-t, 0\}$.
3. $f(t) = \max\{1-t^2, 0\}$.
4. Dokažte části 1 a 2 Věty 1.
5. Dokažte vzorečky z Věty 2.
6. $f(t) = \sinh at$.
7. $f(t) = \cosh at$.
8. $f(t) = \sin^4 t + \cos^4 t$.

9. $f(t) = t^2 \sin^2 t$.

10. Nechť $f(t)/t \in L^1_+$. Potom též $f(t) \in L^1_+$ a platí $\mathscr{L}\big[f(t)/t\big](p) = \int_p^\infty F(s)ds$ pro $p \in (c_f, +\infty)$.

11. $f(t) = \frac{\sin t}{t}$.

12. $f(t) = \frac{e^t - 1}{t}$.

13. Nechť $f \in L^1_+$ a $f(t+T) = f(t)$. Potom $F(p) = \frac{1}{1-e^{-Tp}} \int_0^T f(t)e^{-pt}dt$.

14. $f(t) = \max\{\sin t, 0\}$.

15. $f(t) = \operatorname{sgn}\big(\sin \frac{t}{\pi}\big)$.

16. $f(t) = \frac{1}{1+e^t}$ (vyjádřete řadou).

17. $f(t) = \frac{t}{1-e^{-t}}$(vyjádřete řadou).

18. * Derivováním vztahu $L\{t^n\}(p) = \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$ podle n odvoďte, že $L\{t^n \ln t\}(p) = \frac{1}{p^{n+1}}\big(\Gamma'(n+1) - \Gamma(n+1)\ln p\big)$.

19. * Ukažte, že $L\{J_0(t)\}(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$, kde $J_0(t) = \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^m$ je Besselova funkce prvního druhu s indexem 0.

Výsledky.

1) $F(p) = \frac{1-e^{-pa}}{p}$ pro $p \neq 0$ a $F(0) = a$; $c_f = -\infty$.

2) $F(p) = \frac{p-1+e^{-p}}{p^2}$ pro $p \neq 0$ a $F(0) = 1/2$; $c_f = -\infty$.

3) $F(p) = \frac{(p^2-2)e^p+2p+2}{p^3e^p}$ pro $p \neq 0$ a $F(0) = 2/3$; $c_f = -\infty$.

6) $F(p) = \frac{a}{p^2-a^2}$; $c_f = |a|$.

7) $F(p) = \frac{p}{p^2-a^2}$; $c_f = |a|$.

8) $f(t) = \frac{\cos 4t+3}{4}$; $F(p) = \frac{p^2+12}{p(p^2+16)}$; $c_f = 0$.

9) $F(p) = \frac{8(3p^4+6p^2+8)}{p^3(p^2+4)^3}$; $c_f = 0$.

10) Pište $e^{-pt}/t = \int_p^\infty e^{-ps}ds$ a užijte Fubiniho větu.

11) S pomocí úlohy 10 $F(p) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p$; $c_f = 0$.

12) S pomocí úlohy 10 $F(p) = \ln \frac{p}{p-1}$; $c_f = 1$.

13) Na intervalu $(kT, (k+1)T)$ substituce $t = kT + \tau$, $\tau \in (0, T)$; užijte vzoreček pro součet geometrické řady.

14) S pomocí úlohy 13 $F(p) = \frac{1+e^{-\pi p}}{(1-e^{\pi p})(p^2+1)}$; $c_f = 0$.

15) S pomocí úlohy 13 $F(p) = \frac{e^{-2\pi p}(e^{\pi p}-1)^2}{p(1-e^{-2\pi p})}$; $c_f = 0$.

16) $F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{p+k}$; $c_f = 0$.

17) $F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(p+k)^2}$; $c_f = 0$.

19) Nechť $p > 1$. Potom $\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{1}{p}(1+p^{-2})^{-1/2} = \frac{1}{p}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-1/2}{m}p^{-2m}$, kde $\binom{-1/2}{m} = \frac{(-1/2)(-1/2-1)(-1/2-2)...(-1/2-m+1)}{m!} = \frac{(-1)^m}{m!}1\cdot 3\ldots(2m-1)$.

Aplikace při řešení rovnic.

Laplaceova transformace má tu příjemnou vlastnost, že operaci ,,derivace dle t“ převádí na operaci ,,násobení proměnnou p“.

Věta 3. *Nechť $f(t) \in L^1_+$; nechť navíc $f(t) \in C^1([0,\infty))$ a $f'(t) \in L^1_+$. Potom pro* $\operatorname{Re} p > \max\{c_f, c_{f'}\}$

$$\mathscr{L}\big[f'(t)\big](p) = p\mathscr{L}\big[f(t)\big](p) - f(0).$$

Obecněji, pokud $f^{(k)} \in L^1_+$ pro $k = 0,\ldots,n$ a $f \in C^n([0,\infty))$, pak pro $\operatorname{Re} p > \max\{c_f,\ldots,c_{f^{(n)}}\}$ *je*

$$\mathscr{L}\big[f^{(n)}(t)\big](p) = p^n\mathscr{L}\big[f(t)\big](p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k f^{(n-1-k)}(0)\,.$$

Pomocí Laplaceovy transformace tak lze elegantně řešit diferenciální rovnice s konstantními koeficienty (diferenciální rovnice je převedena na algebraický problém), ale také rovnice obsahující konvoluci.

Definice 3. Pro $f(t)$, $g(t)$ definujeme konvoluci $f * g$ předpisem

$$f * g(t) = \int_0^t f(s)g(t-s)\,ds.$$

Věta 4. *Nechť $f(t)$, $g(t) \in L^1_+$. Potom $f * g(t) \in L^1_+$, $c_{f*g} \le \max\{c_f, c_g\}$ a platí*

$$\mathscr{L}\big[f * g(t)\big](p) = \mathscr{L}\big[f(t)\big](p)\cdot\mathscr{L}\big[g(t)\big](p), \qquad \operatorname{Re} p > \max\{c_f, c_g\}.$$

Důsledek. *Je-li $f(t) \in L^1_+$, je také funkce*

$$\phi(t) := \int_0^t f(s)\,ds$$

prvkem L^1_+ a platí

$$\mathscr{L}\big[\phi\big](p) = \frac{1}{p}\mathscr{L}\big[f\big](p), \qquad \operatorname{Re} p > c_f.$$

Příklad 1. Uvažujme soustavu

$$x' = 7x - 2y + 8te^{-t},$$
$$y' = 8x - y,$$

s počáteční podmínkou

$$x(0) = 0, \qquad y(0) = \frac{1}{2}.$$

Aplikujme (zatím čistě formálně) Laplaceovu transformaci; označme $X(p) = \mathscr{L}\big[x(t)\big](p)$, $Y(p) = \mathscr{L}\big[y(t)\big](p)$. Dostáváme rovnice

$$\begin{aligned} pX(p) &= 7X(p) - 2Y(p) + \frac{8}{(p+1)^2}, \\ pY(p) - \frac{1}{2} &= 8X(p) - Y(p). \end{aligned}$$

Odsud

$$\begin{aligned} X(p) &= -\frac{p-7}{(p+1)\,(p-3)^2}, \\ Y(p) &= \frac{p^3 - 5\,p^2 - 13\,p + 121}{2\,(p+1)^2\,(p-3)^2}. \end{aligned}$$

Nyní chceme najít příslušné Laplaceovy vzory těchto funkcí. Rozložme tedy na parciální zlomky:

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{1}{2(p+1)} + \frac{1}{(p-3)^2} - \frac{1}{2(p-3)}, \\ Y(p) &= \frac{4}{(p+1)^2} + \frac{2}{p+1} + \frac{2}{(p-3)^2} - \frac{3}{2(p-3)}. \end{aligned}$$

Nyní stačí uvážit, že $\mathscr{L}\big[e^{at}\big] = \frac{1}{p-a}$, $\mathscr{L}\big[te^{at}\big] = \frac{1}{(p-a)^2}$. Tedy:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}e^{-t} + (t - \frac{1}{2})e^{3t}, \\ y(t) &= (4t+2)e^{-t} + (2t - \frac{3}{2})e^{3t}. \end{aligned}$$

Zatím ovšem nevíme, že toto jsou vskutku řešení. K otázce se vrátíme v závěru oddílu o inverzní Laplaceově transformaci.

Příklad 2. Uvažme obecnou homogenní soustavu

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x},$$

kde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je vektor, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ konstantní matice. Fundamentálním řešením rozumíme matici $U = U(t)$ takovou, že

$$U' = AU, \qquad U(0) = I\,, \tag{1}$$

kde I je jednotková matice. Označme $\Omega(p) = \mathscr{L}\big[U(t)\big]$; Laplaceova transformace se ovšem aplikuje na matici prvek po prvku. Vzhledem k linearitě je lehko odvodit, že $\mathscr{L}\big[AU\big] = A\mathscr{L}\big[U\big]$. Rovnice (1) tedy přejde na

$$p\Omega(p) - I = A\Omega(p),$$

neboli

$$\Omega(p) = (pI - A)^{-1}.$$

Odtud pak dopočteme $U(t)$. Uvažujme například

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\Omega(p) = \begin{pmatrix} \frac{p+2}{p^2+1} & \frac{p-3}{p^3-p^2+p-1} & \frac{1-2p}{p^3-p^2+p-1} \\ \frac{-1}{p^2+1} & \frac{p^2-p+2}{p^3-p^2+p-1} & \frac{p}{p^3-p^2+p-1} \\ \frac{2}{p^2+1} & \frac{2}{p^2+1} & \frac{p-1}{p^2+1} \end{pmatrix}.$$

Podívejme se blíže na druhý člen na prvním řádku. Parciální zlomky jsou

$$\frac{-1}{p-1} + \frac{p+2}{p^2+1}.$$

Připomeňme, že $\mathscr{L}\big[\sin at\big] = \frac{a}{p^2+a^2}$, $\mathscr{L}\big[\cos at\big] = \frac{p}{p^2+a^2}$. Odtud

$$U_{12}(t) = -e^t + \cos t + 2\sin t.$$

Celkem dopočítáme $U(t) =$

$$\begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t, & -e^t + \cos t + 2\sin t, & -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}(\cos t - 3\sin t) \\ \sin t, & e^t - \sin t, & \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) \\ 2\sin t, & 2\sin t, & \cos t - \sin t \end{pmatrix}.$$

Poznámka. Při řešení soustav se často hodí fakt, že inverzní matici lze spočítat pomocí explicitních vzorců:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

a obecněji $A^{-1} = B$, kde $b_{ij} = (\det A)^{-1}(-1)^{i+j}A_{ji}$, přičemž A_{ji} je subdeterminant A, který vznikne vyškrtnutím j-tého řádku a i-tého sloupce.

Příklad 3. Uvažujme rovnici

$$x(t) + \int_0^t e^{3s}x(t-s)ds = \sin 2t, \quad t > 0.$$

Pozorujeme, že druhý člen vlevo je konvoluce funkcí e^{3t} a neznámé funkce $x(t)$. Tedy Laplaceova transformace dává

$$X(p) + X(p)\frac{1}{p-3} = \frac{2}{p^2+4}.$$

Odsud lehce

$$X(p) = \frac{2p-6}{p^3-2p^2+4p-8} = \frac{p+10}{4(p^2+4)} - \frac{1}{4(p-2)}.$$

Laplaceův vzor je zjevně

$$x(t) = \frac{5}{2}\sin 2t + \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{4}e^{2t}.$$

Příklad 4. Vyřešme Abelovu rovnici

$$\int_0^t \frac{v(s)ds}{(t-s)^\alpha} = f(t)$$

kde $\alpha \in (0,1)$ a $f(t) \in C^1([0,\infty)) \cap L^1_+$, $f'(t) \in L^1_+$. Protože levá strana je konvolucí neznámé funkce $v(t)$ a $t^{-\alpha}$, Laplaceova transformace dává, s ohledem na Věty 2 a 4

$$V(p)\Gamma(1-\alpha)p^{\alpha-1} = F(p),$$

odsud snadno vyjádříme

$$V(p) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}F(p)p^{1-\alpha}$$

Protože $p^\beta \in \mathscr{L}\big[L^1_+\big]$ pouze pro $\beta < 0$, rozepíšeme pravou stranu jako

$$V(p) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} F(p)p \cdot p^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \Big(\mathscr{L}\big[f'(t)\big](p) - f(0)\Big) \cdot \mathscr{L}\big[t^{\alpha-1}\big](p)$$

Všimněte si triku s přepisem $F(p)p = \mathscr{L}\big[f'(t)\big](p) - f(0)$. Odsud získáme vzoreček pro řešení

$$v(t) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \left\{ \frac{f(0)}{t^{1-\alpha}} + \int_0^t \frac{f'(s)ds}{(t-s)^{1-\alpha}} \right\}.$$

Použili jsme Eulerův vzoreček k úpravě součinu Gamma funkcí. Úpravy jsou ekvivalentní; nalezené $v(t)$ je (jediné) řešení ve třídě L^1_+.

Řešte pomocí Laplaceovy transformace.

20. $x'' + x' - 6x = 3$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$.

21. $x''' - 4x'' + 4x' = 0$, $x(0) = x'(0) = 0$, $x''(0) = 1$.

22. $x''' = \cos t$, $x(0) = x''(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

23. $x^{(4)} = t^4$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 1$.

24. $x'' + 9x = 3t$, $x(0) = x'(0) = 0$.

25. $x'' + 9x = \sin 3t$, $x(0) = x'(0) = 0$.

26. $x'' + 4x' + 8x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

27. $x'' - 4x' + 5x = 5t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 5$.

28. $x''' + x'' - 3x' - 3x = 3t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = x''(0) = 0$.

29. $x''' - 3x'' + 3x' - x = 4e^{-t}$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

30. $x^{(4)} - 8x'' + 16 = 16$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$, $x'''(0) = -16$.

31. $x^{(4)} - x'' = 2\sin t$, $x(0) = 2$, $x'(0) = x'''(0) = 0$, $x''(0) = 1$.

32. $x(t) + \int_0^t se^{3s}x(t-s)ds = \cos 2t$.

33. $x(t) + 4\int_0^t s^2 x(t-s)ds = t$.

34. $3x(t) + 7\int_0^t \sin 3s x(t-s)ds = 2t + 1$.

35. $x(t) - \int_0^t se^{8s}x(t-s)ds = e^{7t}$.

36. $x(t) = t + \int_0^t sx(t-s)ds$.

37. $x(t) = \cos 2t + \int_0^t \sin s x(t-s)dx$.

38. $x'(t) + 2x(t) + 5\int_0^t x(s)ds = 0$, $x(0) = 1$.

39. $x'(t) - 8\int_0^t s^2 x(t-s)ds$, $x(0) = 2$.

40. * $\int_0^t x(s)x(t-s)ds = \sin t$. (Užijte úlohu 19.)

Výsledky:

20) $X(p) = -\frac{p-3}{p(-6+p+p^2)}$, $x(t) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{5}e^{-3t} + \frac{1}{10}e^{2t}$.

21) $X(p) = \frac{1}{p(4-4p+p^2)}$, $x(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}te^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t}$.

22) $X(p) = \frac{p^2+2}{p^2(p^2+1)}$, $x(t) = 2t - \sin t$.

23) $X(p) = \frac{p^8-p^7+p^6+p^5+24}{p^9}$, $x(t) = \frac{1}{1680}t^8 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - t + 1$.

24) $X(p) = 3\frac{1}{p^2(9+p^2)}$, $x(t) = \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}\sin 3t$.

25) $X(p) = 3\left(81 + 18p^2 + p^4\right)^{-1}$, $x(t) = \frac{1}{18}\sin 3t - \frac{1}{6}t\cos 3t$.

26) $X(p) = \frac{4+p}{8+4p+p^2}$, $x(t) = e^{-2t}\cos 2t + e^{-2t}\sin 2t$.

27) $X(p) = -5\frac{p^2-1}{p^2(5-4p+p^2)}$, $x(t) = t + \frac{4}{5} - \frac{4}{5}e^{2t}\cos t - \frac{22}{5}e^{2t}\sin t$.

28) $X(p) = \frac{p^3-3p+3}{(p^2-3)p^2}$, $x(t) = -t + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\sinh\sqrt{3}t$.

29) $X(p) = 4\left(2p - 1 - 2p^3 + p^4\right)^{-1}$, $x(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + t^2e^t - te^t + \frac{1}{2}e^t$.

30) $X(p) = -16\frac{p-1}{p(16-8p^2+p^4)}$, $x(t) = 1 - \frac{1}{2}te^{2t} - \frac{3}{2}te^{-2t} - e^{-2t}$.

31) $X(p) = \frac{2p^4-2p^3+3p^2-3p+2}{(p^3-p^2+p-1)p^2}$, $x(t) = e^t - 2t + 1 + \sin t$.

32) $X(p) = \frac{p-10}{30(p^2-6p+10)} + \frac{29p+4}{30(p^2+4)}$, $x(t) = \frac{1}{15}\sin 2t + \frac{29}{30}\cos 2t + e^{3t}\big(\frac{1}{30}\cos t - \frac{7}{30}\sin t\big)$.

33) $X(p) = \frac{p}{p^3+8} = \frac{p+2}{6(p^2-2p+4)} - \frac{1}{6(p+2)}$, $x(t) = e^t\big(\frac{1}{2\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t + \frac{1}{6}\sin\sqrt{3}t\big) - \frac{1}{6}e^{-2t}$.

34) $X(p) = \frac{p^3+2p^2+9p+18}{3p^4+48p^2} = \frac{7p+14}{48(p^2+16)} + \frac{3}{16p} + \frac{3}{8p^2}$, $x(t) = \frac{7}{96}\sin 4t + \frac{7}{48}\cos 4t + \frac{3t}{8} + \frac{3}{16}$.

35) $X(p) = \frac{p^2-16p+64}{p^3-23p^2+175p-441} = \frac{3}{4(p-7)} - \frac{1}{2(p-7)^2} + \frac{1}{4(p-9)}$, $x(t) = \frac{1}{4}e^{9t} - \frac{t}{2}e^{7t} + \frac{3}{4}e^{7t}$.

36) $X(p) = \left(p^2 - 1\right)^{-1}$, $x(t) = \sinh t$.

37) $X(p) = \frac{p^2+1}{p(p^2+4)}$, $x(t) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2t$.

38) $X(p) = \frac{p}{p^2+2p+5}$, $x(t) = e^{-t}\cos 2t - \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$.

39) $X(p) = 2\frac{p^3}{p^4-16}$, $x(t) = \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{-2t} + \cos 2t$.

40) $x(t) = J_0(t)$.

Inverzní Laplaceova transformace.

První otázka v souvislosti s inverzí Laplaceovy transformace pochopitelně zní, zda se jedná o prosté zobrazení. Kladná odpověď je obsahem následující tzv. Lerchovy věty, jejíž elementární důkaz lze nalézt v dodatku.

Věta 5 (Lerch). *Nechť $f(t)$, $g(t) \in L^1_+$, a nechť existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $F(p) = G(p)$ pro každé $p \in (c, \infty)$. Potom $f(t) = g(t)$ skoro všude.*

Za druhé nás zajímá, za jakých okolností je funkce $F(p)$ laplaceovým obrazem nějakého prvku L^1_+. Vhodnou postačující podmínku nám dává další věta.

Věta 6. *Nechť $F(p)$ je holomorfní v množině $\{p \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} p > a\}$ a splňuje zde odhad*

$$|F(p)| \leq \frac{c}{|p|^2}. \tag{2}$$

Potom existuje funkce $f(t) \in L^1_+$ s abscisou konvergence $c_f \leq a$ taková, že $\mathscr{L}\big[f\big](p) = F(p)$ pro všechna $\operatorname{Re} p > a$. Funkci $f(t)$ lze vyjádřit integrálem

$$f(t) = \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iR}^{b+iR} F(z) e^{tz} dz, \qquad t > 0, \tag{3}$$

kde $b > a$ je libovolné.

Poznámka. Vzorec (3) se nazývá Bromwichův nebo též Fourier-Mellinův integrál. Je zde míněn křivkový integrál v $\mathbb{C}$ podél křivky $\phi(s) = b + is$, $s \in [-R, R]$.

Za dodatečných předpokladů na funkci $F(p)$ lze integrál v (3) vypočíst pomocí reziduové věty. Zformulujme to opět jako větu.

Věta 7. *Nechť $F(p)$ je holomorfní v množině $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$, a nechť platí odhad (2) pro $|p| \to \infty$. Potom existuje $f(t) \in L^1_+$ taková, že $\mathscr{L}\big[f\big](p) = F(p)$ pro $\operatorname{Re} p > \max\{\operatorname{Re} z_1, \ldots, \operatorname{Re} z_n\}$, a platí*

$$f(t) = \sum_k \operatorname{res}_{z=z_k} F(z) e^{tz}, \qquad t > 0. \tag{4}$$

Poznámka. Předpokládáme-li dokonce, že $F(p)$ je racionální funkce, lze požadavek (2) v přechozích větách nahradit slabším předpokladem

$$|F(p)| \leq \frac{c}{|p|}. \tag{5}$$

To odpovídá situaci, kdy $F(p)$ je podíl polynomů, a čitatel má menší stupeň než jmenovatel, s čímž vystačíme v naprosté většině případů.

Závěrečná diskuse

Jak se lze přesvědčit o tom, že řešení získané ,,formální“ aplikací Laplaceovy transformace je opravdu řešením původní rovnice?

- Předpokládejme, že je nám z teorie známo, že studovaná rovnice *má* řešení ve třídě funkcí L^1_+. (To je pravda kupříkladu pro lineární rovnice s konstantními koeficienty.) Pak toto řešení musí splňovat transformovanou rovnici. Díky Větě 5 je příslušný Laplaceův vzor (získaný ať z tabulek, ať pomocí Vět 6, 7) nutně roven řešení naší rovnice.

- O správnosti nalezeného řešení se lze v každém případě přesvědčit jednoduše dosazením. (Zcela bezpečný, ovšem v praxi někdy hodně pracný způsob.)

- Důmyslnější způsob jak provést ,,zkoušku“ si předvedeme na jednoduché rovnici

$$x'(t) + \int_0^t e^s x(t-s) = 1, \qquad x(0) = 1.$$

  Aplikujme nejprve ,,formálně“ Laplaceovu transformaci. Máme

$$pX(p) + \frac{1}{p-1}X(p) = \frac{1}{p} - 1.$$

  Odsud

$$X(p) = \frac{p^2-1}{p^3-p^2+p} = \frac{2p-1}{p^2-p+1} - \frac{1}{p}. \tag{6}$$

  Nyní nalezneme funkci

$$\tilde{x}(t) = 2e^{2t}\cos\sqrt{3}t/2 - 1,$$

  což je (jediná) funkce splňující $\mathscr{L}\big[\tilde{x}\big] = X(p)$. Ovšem $\tilde{x} \in L^1_+ \cap C^\infty$, a tedy můžeme počítat

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\Big[\tilde{x}'(t) + \int_0^t e^s \tilde{x}(t-s)ds\Big] &= p\tilde{X}(p) + \frac{1}{p-1}\tilde{X}(p) - \tilde{x}(0)\\ &= -\left(\frac{1}{p} - 1\right) - \tilde{x}(0)\\ &= \frac{1}{p}\\ &= \mathscr{L}\big[1\big].\end{aligned}$$

Ve druhém řádku jsme užili fakt, že $\tilde{X}(p)$ vyhovuje rovnici (6). Z Věty 5 však plyne, že

$$\tilde{x}'(t) + \int_0^t e^s \tilde{x}(t-s) ds = 1$$

skoro všude; díky hladkosti $\tilde{x}$ nastává rovnost pro všechna $t \geq 0$. Z přechozích úvah navíc vyplývá, že $\tilde{x}$ je *jediné* řešení ve třídě L^1_+.

Dodatek - důkaz Lerchovy věty.

Lemma 8. *Nechť $\varphi(x)$ je spojitá v $[0,1]$ a*

$$\int_0^1 \varphi(x) x^m \, dx = 0 \,, \qquad \forall m \geq 0 \text{ celé.} \tag{7}$$

Potom $\varphi(x) = 0$.

Jeden z mnoha možných důkazů: Pomocí Weierstrassovy věty naleznu posloupnost polynomů $p_n(x)$ takových, že $p_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ v $[0,1]$. Odtud zřejmě $p_n(x)\varphi(x) \rightrightarrows (\varphi(x))^2$ a tedy

$$\int_0^1 p_n(x)\varphi(x) \, dx \to \int_0^1 (\varphi(x))^2 \, dx \,.$$

Díky (7) je však $\int_0^1 p_n(x)\varphi(x) \, dx = 0$ pro každé n, tedy pravá strana je 0. Integrál z nezáporné (spojité) funkce je ovšem nula jen tehdy, je-li funkce identicky nulová. □

Věta 9 (Lerch, 1903). *Nechť $f(t) \in L^1_+$; předpokládejme navíc,*[1] *že f je spojitá. Nechť existuje $p_0 \in \mathbb{R}$ takové, že*

$$\int_0^\infty f(t) e^{-pt} \, dt = 0 \,, \qquad \forall p \in [p_0, \infty).$$

Potom $f(t) = 0$.

Důkaz. Stačí dokonce slabší předpoklad

$$\int_0^\infty f(t) e^{-(p_0+n)t} \, dt = 0 \,, \qquad \forall n \geq 0 \text{ celé.} \tag{8}$$

[1] Čtenář, který zná pojem „absolutní spojitost“, se bez tohoto dodatečného předpokladu samozřejmě obejde.

Označme

$$b(t) = \int_t^\infty f(s) e^{-p_0 s}\, ds\,.$$

Derivováním podle dolní meze máme

$$b'(t) = -f(t) e^{-p_0 t}\,, \tag{9}$$

tedy $b(t)$ je C^1 v $[0,\infty)$, a díky (8) platí

$$b(0) = 0\,. \tag{10}$$

Případným zvětšením p_0 zajistíme, že

$$g(t) = f(t) e^{-(p_0-1)t} \in L^1(0,\infty)\,.$$

Odtud plyne odhad na pokles $b(t)$ v nekonečnu

$$|b(t)| = |\int_t^\infty g(s) e^{-s}\, ds| \le e^{-t} \int_t^\infty g(s)\, ds \le c e^{-t}\,. \tag{11}$$

Integrací per-partes nyní dostáváme

$$\int_0^\infty \underbrace{f(t) e^{-p_0 t}}_{u'} \underbrace{e^{-nt}}_{v}\, dt = \big[-b(t) e^{-nt}\big]_0^\infty - n \int_0^\infty b(t) e^{-nt}\, dt\,.$$

Z (8)–(11) vyplývá

$$\int_0^\infty b(t) e^{-nt}\, dt = 0\,, \qquad \forall n \ge 1 \text{ celé.}$$

Substitucí $x = e^{-t}$ obdržíme

$$\int_0^1 \varphi(x) x^{n-1}\, dx = 0\,, \qquad \forall n \ge 1 \text{ celé.}$$

$$\varphi(x) = b(-\ln x)\,.$$

Dodefinováním nulou na krajích je $\varphi(x)$ spojitá v $[0,1]$. K ověření spojitosti v 0 zprava užijeme (11):

$$|\varphi(x)| \le c \exp(-(-\ln x)) = cx\,.$$

Podle Lemmatu 1 je $\varphi(x) = 0$, tedy $b(t) = 0$ a odtud podle (9) $f(t) = -b'(t) e^{p_0 t} = 0$. $\square$