Úlohy na integrační faktor

„Integrační faktor" je vhodně zvolená funkce, kterou násobíme studovanou rovnici, aby se stala derivací (obecněji totálním diferenciálem) „něčeho". Tím dostaneme (implicitně zadané) řešení.

Řešení lineárních rovnic 1. řádu se pomocí integračního faktoru redukuje na výpočet dvou primitivních funkcí. Na lineární rovnice 1. řádu jsou formálně lehce převoditelné Bernoulliho rovnice.

Zobecněním lineárních ODR 1. řádu jsou tzv. rovnice ve tvaru totálního diferenciálu.

Lineární ODR 1. řádu

Definice 1. Lineární ODR 1. řádu rozumíme rovnici

$$y' + a(x)y = b(x)\,. \tag{1}$$

Rovnici považujeme za *lineární*, protože lineární je závislost (levé strany) na neznámé funkci $y = y(x)$; koeficienty rovnice $a(x)$, $b(x)$ jsou obecně *nelineární* funkce x.

Věta 1 (Řešení lineární ODR 1. řádu.)**.** *Je dána rovnice* (1)*. Nechť* $a(x)$*,* $b(x)$ *jsou spojité v* I*, nechť* $A(x) = \int a(x)\,dx$*,* $B(x) = \int b(x) \exp A(x)\,dx$ *v* I*. Nechť* $c \in \mathbb{R}$ *je libovolné. Potom*

$$y(x) = \exp(-A(x))\big[B(x) + c\big]$$

je řešení rovnice (1) *v* I*. Naopak: všechna řešení rovnice* (1) *v* I *mají tento tvar.*

Poznámka. Výraz $\exp A(x)$ se nazývá integrační faktor. Důkaz samotné věty je velmi jednoduchý (a je užitečné jej znát při řešení příkladů): Násobíme rovnici $\exp A(x)$ a vzhledem k tomu, že $\big(\exp A(x)\big)' = a(x)\exp A(x)$, dostáváme

$$\begin{aligned} y'(x)\exp A(x) + y(x)\big(\exp A(x)\big)' &= b(x)\exp A(x) \\ \big(y(x)\exp A(x)\big)' &= B'(x) \end{aligned}$$

Užijeme tvrzení, že $f'(x) = g'(x)$ v I, právě když $f(x) = g(x) + c$ pro vhodné $c \in \mathbb{R}$.

Poznámka. Protože se jedná o lineární úlohu, můžeme k řešení použít také *metodu variace konstant.* Příslušná homogenní rovnice zní

$$y' = -a(x)y;$$

její obecné řešení má tedy tvar $y = c\exp(-A(x))$, kde $A(x) = \int a(x)dx$ stejně jako výše. Nyní hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$y_p = c(x)\exp(-A(x)).$$

Protože $y_p' = c'(x)\exp(-A(x)) - c(x)a(x)\exp(-A(x))$, po dosazení do rovnice a jednoduché úpravě dostaneme

$$c'(x) = b(x)\exp A(x)$$

tedy $c(x) = \int b(x)\exp A(x)dx$. Obdržené řešení má týž tvar jako ve Větě 1.

Příklad 1. Rovnice $y' + y\cos x = (1+x)e^{-\sin x}$.

Řešení. Integrační faktor je $e^{\sin x}$, rovnice po vynásobení přejde na

$$\begin{aligned} y'e^{\sin x} + y\cos x e^{\sin x} &= 1 + x \\ \left(ye^{\sin x}\right)' &= (x + \frac{x^2}{2})'; \end{aligned}$$

odtud obecné řešení $y(x) = (x + \frac{x^2}{2} + C)e^{-\sin x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 2. Rovnice $xy' - 3y = x^4$.

Řešení. Uvedeme na tvar (1); což lze v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$:

$$y' - \frac{3}{x}y = x^3. \tag{2}$$

Protože

$$\int \frac{-3}{x}dx = -3\ln|x| = \ln|x|^{-3},$$

obdržíme integrační faktor $|x|^{-3}$; budeme ale pracovat raději s funkcí x^{-3} – jen změna znaménka na intervalu $(-\infty, 0)$. Násobení rovnice (2) dává

$$\begin{aligned} \frac{y'}{x^3} - \frac{3}{x^4}y &= 1 \\ \left(\frac{y}{x^3}\right)' &= x' \\ \frac{y}{x^3} &= x + C \\ y &= x^3(x + C) \end{aligned}$$

Výpočet jsme prováděli za předpokladu $x \neq 0$; splnění rovnice je tak zaručeno na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$. Díky spojitosti y, y' je rovnice splněna i v bodě $x = 0$. Protože $y(0) = y'(0) = 0$ nezávisle na C, lze řešení s různými konstantami v počátku napojit. Obecné řešení má tedy tvar

$$y(x) = \begin{cases} x^3(x + C_1), & x < 0 \\ x^3(x + C_2), & x \geq 0 \end{cases}$$

kde C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$ jsou libovolná.

Řešte lineární ODR 1. řádu.

1. $y' + y = \sin x \exp(-x)$

2. $x^3 y' - xy = 1$

3. $xy' + (1 + x)y = \exp x$

4. $xy' - y = x^3 \exp x$

5. $y' + \alpha y = \exp \beta x$

6. $y' + \frac{x}{1+x^2} y = \frac{1}{x(x^2+1)}$

Výsledky.

1) $y = e^{-x}(c - \cos x)$, $x \in \mathbb{R}$; i.f. e^x.

2) $y = c \exp(-1/x) + 1 - 1/x$, $x \in (-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$; i.f. $\exp(1/x)$. Řešení nelze prodloužit do $x = 0$ (nekonečné limity).

3) $y = x^{-1}(ce^{-x} + e^x/2)$, $x \in (-\infty)$ a $(0, +\infty)$; i.f. xe^x. Pro $c \neq -1/2$ nelze prodloužit do $x = 0$. Pokud $c = -1/2$, dodefinováním $y(0) = 1$ vzniká funkce (nekonečně hladká), která je řešením v celém $\mathbb{R}$.

4) $y = x(x-1)e^x + cx$, $x \in \mathbb{R}$; i.f. $1/x$. – Splnění rovnice pro $x = 0$ je třeba ověřit zvlášť. Je $y(0) = 0$ pro každé c; protože však $y'(0) = c - 1$, nelze řešení pro různá c napojovat.

5) Pro $\alpha \neq -\beta$: $y = ce^{-\alpha x} + (\alpha + \beta)^{-1} e^{\beta x}$, $x \in \mathbb{R}$; pro $\alpha = -\beta$: $y = e^{-\alpha x}(c + x)$, $x \in \mathbb{R}$; i.f. $e^{\alpha x}$.

6) $y = (\sqrt{x^2+1})^{-1}[c + \ln \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}}]$, $x \in (-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$; i.f. $\sqrt{x^2+1}$.

Bernoulliho rovnice.

Definice 2. Rovnice

$$y' + a(x)y = b(x)y^\alpha\,, \tag{3}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$, se nazývá Bernoulliho rovnice.

Postup řešení Bernoulliho rovnice je následující: násobením $(1-\alpha)y^{-\alpha}$ přejde na lineární rovnici

$$z' + (1-\alpha)a(x)z = (1-\alpha)b(x) \tag{4}$$

pro novou neznámou funkci $z(x) = [y(x)]^{1-\alpha}$.

Můžeme předpokládat, že $\alpha \neq 1$ (jinak by se jednalo o lineární rovnici); dále hledáme takto jen *nenulová* řešení. Nulová funkce je řešením vždy (je-li výraz $0^\alpha = 0$); případné napojení v bodě $y = 0$ je pak třeba diskutovat na závěr.

Příklad 3. Rovnice

$$y' - \frac{4y}{x} = x\sqrt{y}\,, \tag{5}$$

tj. $\alpha = 1/2$; substituce $z = y^{1-1/2} = \sqrt{y}$ vede na

$$z' - \frac{2z}{x} = \frac{x}{2}\,. \tag{6}$$

To je lineární ODR 1. řádu, kterou lehce vyřešíme pomocí integračního faktoru $1/x^2$, obecné řešení je $z = x^2(c + \ln\sqrt{|x|})$, platné v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

Nyní však POZOR: zpětné dosazení

$$y = z^2 = x^4(c + \ln\sqrt{|x|})^2 \tag{7}$$

dává funkci, která vyhoví původní rovnici (5) pouze za dodatečného předpokladu, že $c + \ln\sqrt{|x|} > 0$ (ověřte podrobně!); tj. v $(-\infty, -\exp(-2c))$ a $(\exp(2c), +\infty)$.

V čem je zádrhel: v tomto okamžiku přecházím od rovnice (6) zpět k (5), ovšem $y = z^2$ je opačná operace k $z = \sqrt{y}$ pouze za podmínky $z \geq 0$; pro $z < 0$ by bylo $z = -\sqrt{y}$ a tudíž (6) by vypadala jinak.

Snad jednodušší je si pamatovat, že $z = \sqrt{y}$ je nutně nezáporné, tudíž hledám jen nezáporná řešení rovnice (6). (Fakticky musím uvažovat pouze kladná z, neboť při přechodu od (5) k (6) dělím funkcí $z = \sqrt{y}$.)

Dále si rozmyslím, že $y = 0$ je řešení původní rovnice (5) v maximálních intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$. Toto řešení lze napojit v bodech $-\exp(-2c)$ a $\exp(2c)$.

Poznámka. Podobná situace není při řešení ODR vzácností: funkce spočítaná formálním, bezmyšlenkovitým postupem je řešení často na menší množině než její na první pohled zřejmý „definiční obor“.

Řešte Bernoulliho rovnice:

7. $y' - \frac{xy}{2(x^2-1)} - \frac{x}{2y} = 0$

8. $xy' + y = xy^2 \ln x$

9. $y' - 2xy = 2x^3y^2$

10. $y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{2y}$

11. $xy' + y = y^2 \ln x$, $y(1) = 1$.

12. $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$

13. $y' - 9x^2y = (x^5 + x^2)y^{2/3}$, $y(0) = 0$.

14. $y' + 4xy + 2e^{-x^2}\sqrt{y} = 0$, $y(0) = 0$.

15.

$$3y' + \frac{y}{(1+x^2)(\pi/2 - \operatorname{arccotg} x)} + \frac{1}{(1+x^2)y^2} = 0, \qquad y(1) = -\sqrt[3]{\pi}/2.$$

16. $2y' - 6y \operatorname{tg} x + 3\sqrt[3]{y} \sin x = 0$, $y(0) = (1/3)^{2/3}$.

17. $y' - xy + xy^2 = 0$

18. $y' + 2y/x^2 + 2\sqrt{y}/x^2 = 0$

19. $y' + y \operatorname{cotg} x + \cos x/2y = 0$, $y(\pi/2) = 2/\sqrt{3}$.

20. $y' - y - y^2 = 0$

21.

$$3y' + \frac{2y}{x \ln x} + \frac{2}{x\sqrt{y}} = 0$$

22.

$$4y' + \frac{3y}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}\sqrt[3]{y}} = 0$$

23. $4y' + 3y + 3(\cos^2 x - 1/2)e^{-x}/\sqrt[3]{y} = 0$

Výsledky.

7) $y = \pm\sqrt{(x^2-1) + c\sqrt{|x^2-1|}}$, na intervalech, kde je výraz pod odmocninou kladný; (subs. $z = y^2$).

8) $y = 0$, $y = \frac{2}{x(2c - \ln|x|)}$, na intervalech, kde je jmenovatel nenulový; (subs. $z = 1/y$).

9) $y = 0$ a $y = (ce^{-x^2} + 1 - x^2)^{-1}$, na intervalech, kde je jmenovatel nenulový; (subs. $z = 1/y$).

10) $y = \pm\sqrt{x(c+\ln|x|)}$, $x \in (-e^{-c}, 0)$ a $x \in (0, e^{-c})$, (subs. $z = y^2$ ... jen kladná z)

11) $y = \frac{1}{1+\ln x}$, $x \in (1/e, \infty)$, (subs. $z = 1/y$)

12) $y = \pm(e^{-x^2}(2x+c))^{-1/2}$, $x > -c/2$, $y = 0$, $x \in \mathbb{R}$; (subs. $z = y^{-2}$)

13) $y = (ce^{x^3} - (x^3+2)/9)^3$, $x \in \mathbb{R}$. Pro dané c mohou existovat až dva nulové body tohoto řešení; v nich lze napojit řešení $y = 0$, $x \in \mathbb{R}$. (subs. $z = \sqrt[3]{y}$)

14) $y = 0$, $x \in \mathbb{R}$, nebo $y = (x-c)^2 e^{-2x^2}$, $x < c$ a nula jinde. $z = y^{1/2}$, nutně $y \geq 0$, větvení v bodě $y = 0$.

15) $y = -\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x/2}$, $x \in (0, \infty)$. $z = y^3$, nutně $y \neq 0$, $x \neq 0$; všimnu si, že $\pi/2 - \operatorname{arccotg} x = \operatorname{arctg} x$. Obecné řešení $y = \sqrt[3]{C/\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x/2}$.

16) $y = (\cos x/3)^{3/2}$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. y je řešení $\Longrightarrow$ $-y$ je řešení; $y = 0$ je řešení. $z = y^{2/3}$ za předpokladu $y > 0$ dává $y = (C/\cos^2 x + \cos x/3)^{2/3}$, je-li výraz uvnitř závorky kladný.

17) $y = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Pro $y \neq 0$ kladu $z = 1/y$, odtud $y = 1/(Ce^{-x^2/2} + 1)$, $x \in I_C$, kde $I_C = \mathbb{R}$ pro $C > -1$; $I_C = (-\infty, 0)$ nebo $(0, \infty)$ pro $C = -1$ a konečně $I_C = (-\infty, -\sqrt{2\ln(-C)})$ nebo $(-\sqrt{2\ln(-C)}, \sqrt{2\ln(-C)})$ nebo $(\sqrt{2\ln(-C)}, \infty)$ pro $C < -1$.

18) $y = 0$ pro $x \in (-\infty, 0)$ nebo $(0, \infty)$. Nutně $y \geq 0$. Kladu $z = \sqrt{y}$ pro $y > 0$, odtud $y = (Ce^{1/x} - 1)^2$, $x \in I_C$, kde závorka je kladná, tj. nutně $C > 0$ a dále $I_C = (0, \infty)$ pro $C \geq 1$ nebo $(-\infty, -1/\ln C)$ pro $C > 1$ či konečně $(0, -1/\ln C)$ pro $C \in (0, 1)$. V bodech $-1/\ln C$ lze napojit nulové řešení.

19) $y = \sqrt{(5 - \sin^3 x)/(3\sin^2 x)}$, $x \in (0, \pi)$. Nutně $y \neq 0$, kladu $z = y^2$, odtud $y = \pm\sqrt{(3C - \sin^3 x)/(3\sin^2 x)}$, $x \in I_C$ – z podmínky $3C - \sin^3 x > 0$, tj. $I_C = (0, \pi)$ pro $C > 1/3$ a $I_C = (0, A)$ nebo $(\pi - A, \pi)$, kde $A = \arcsin\sqrt[3]{3C}$ pro $C \in (0, 1/3]$.

20) $y = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Pro $y \neq 0$ klademe $z = 1/y$, odtud $y = 1/(Ce^{-x} - 1)$, $x \in I_C$, kde $I_C = \mathbb{R}$ pro $C \leq 0$ a $I_C = (-\infty, \ln C)$ nebo $(\ln C, \infty)$ pro $C > 0$. – Napojovat nelze (lokální jednoznačnost řešení!)

21) Nutně $y > 0$, $x > 0$ a $x \neq 1$. Kladu $z = y^{3/2}$, odtud $y = ((2C - \ln^2 x)/(2\ln x))^{2/3}$, $x \in I_C$, kde $I_C = (0, 1)$ pro $C \leq 0$, zatímco pro $C > 0$ $I_C = (0, \exp(-\sqrt{2C}))$ nebo $(1, \exp\sqrt{2C})$.

22) Nutně $x > 0$, $y \neq 0$; y řešení $\Longrightarrow$ $-y$ je řešení. Pro $y > 0$ kladu $z = y^{4/3}$, odtud $y = \pm(C\exp(-2\sqrt{x}) + 1)^{3/4}$, $x \in I_C$, kde $I_C = (0, \infty)$ pro $C \geq 0$ a $I_C = (\ln^2(-C)/4, \infty)$ pro $C < 0$.

23) Nutně $y \neq 0$; y řešení $\Longrightarrow$ $-y$ je řešení. Pro $y > 0$ kladu $z = y^{4/3}$, odtud $y = \pm(C - \sin 2x/4)^{3/4} e^{-3/4x}$, $x \in I_C + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Zde $I_C = \mathbb{R}$ pro $C > 1/4$, zatímco $I_C = (A/2, \pi - A/2)$, $A = \arcsin 4C$ pro $C \in [-1/4, 1/4]$.

Rovnice ve tvaru totálního diferenciálu.

Studujeme rovnici

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0, \tag{8}$$

kde $M(x,y), N(x,y) : \Omega \to \mathbb{R}$ jsou spojité a $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina.

Poznámka. Názorně řečeno: řešením (8) jsou křivky, jejichž tečný vektor (dx, dy) je v každém bodě roviny kolmý na vektor (M, N).

Rovnici (8) lze chápat jako souhrnné vyjádření dvou (za jistých předpokladů ekvivalentních) ODR prvního řádu:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \tag{9}$$

pro neznámou funkci $y = y(x)$, nebo

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{N(x,y)}{M(x,y)} \tag{10}$$

pro neznámou funkci $x = x(y)$.

Pokud existuje $V = V(x,y)$ tak, že

$$\partial_x V = M\,, \qquad \partial_y V = N \tag{11}$$

(v tomto smyslu je (8) totálním diferenciálem V), jsou řešení rovnic (9), (10) implicitně vyjádřena podmínkou $V(x,y) = konst.$

Definice 3. Rovnice (8) se nazve exaktní, pokud M, N jsou C^1 a platí

$$\partial_y M = \partial_x N\,. \tag{12}$$

Poznámka. Pokud existuje $V \in C^2$ tak, že $\nabla V = (M, N)$, je (8) nutně exaktní.

Platí i obráceně: je-li (8) exaktní, existuje (alespoň lokálně) $V \in C^2$ tak, že (11) platí.

Postup řešení rovnice (8) je následující:

1. Je-li rovnice exaktní, dopočteme V tak, aby platilo (11); toto V určuje řešení ve smyslu předchozí diskuse.

2. Není-li exaktní, násobíme ji vhodnou nenulovou funkcí (tzv. *integrační faktor*) tak, aby byla exaktní, a postupujeme bodem 1.

Příklad 4. Máme rovnici $(e^x + y)\,dx + (x + 2y\cos y^2)\,dy = 0$, tj. $M = e^x + y$, $N = x + 2y\cos y^2$. Rovnice je exaktní, chceme tedy najít $V = V(x,y)$ tak, aby platilo (11).

$$\begin{aligned}\partial_x V(x,y) &= e^x + y\\ V(x,y) &= e^x + xy + C(y)\end{aligned}$$

Co se děje: y pro daný okamžik fixujeme, a užijeme větu, že dvě funkce (zde $V(x,y)$ a $e^x + xy$) mají stejnou derivaci (dle x), a tudíž se liší o konstantu C – ta ale obecně závisí na y, tedy $C(y)$.

Druhá rovnice v (11) implikuje

$$\begin{aligned}\partial_y V = x + C'(y) &= x + 2y\cos y^2\\ C'(y) &= 2y\cos y^2\\ C(y) &= \sin y^2 + c\end{aligned}$$

To, že x „zázračně“ vypadlo z rovnice pro $C(y)$, je právě důsledek exaktnosti. Výsledek: $V(x,y) = e^x + xy + \sin y^2$, tedy řešením jsou křivky implicitně zadané rovnicí

$$e^x + xy + \sin y^2 = c.$$

Příklad 5. Je dána rovnice $(x^2 + y)\,dx - x\,dy = 0$. Rovnice není exaktní. Zkoušíme integrační faktor ve tvaru $\mu = \mu(x)$. Podmínka exaktnosti vynásobené rovnice je

$$\partial_y\big\{(x^2 + y)\mu(x)\big\} = \partial_x\big\{ - x\mu(x)\big\}\,,$$

což se redukuje na $x\mu'(x) = -2\mu(x)$. Zde nehledáme obecné, nýbrž libovolné *nenulové* řešení, např. $\mu(x) = 1/x^2$. Vynásobená rovnice $(1 + y/x^2)\,dx - dy/x = 0$ je tedy exaktní, a dopočteme $V = x - y/x$.

Příklad 6. Uvažujme rovnici $(2x^2/y + xy^2)\,dx + 3x^2y\,dy = 0$. Rovnice není exaktní. Zkoušíme integrační faktor ve tvaru $\mu = \mu(x/y)$. Podmínka exaktnosti vynásobené rovnice je

$$\partial_y\Big\{\mu(x/y)\Big(\frac{2x^2}{y} + xy^2\Big)\Big\} = \partial_x\big\{\mu(x/y)3x^2y\big\}\,. \tag{13}$$

Uvědomme si, že $\partial_x\mu(x/y) = \mu'(x/y)/y$, $\partial_y\mu(x/y) = -\mu'(x/y)x/y^2$, dle věty o derivaci složené funkce. Po zjednodušení dostaneme

$$-\mu'(x/y)\cdot\frac{x}{y} = \mu(x/y)\,.$$

Tedy, nazveme-li proměnnou funkce μ jako 't', máme $-\mu'(t)t = \mu(t)$. Opět stačí nějaké nenulové řešení, např. $\mu(t) = 1/t$. Integrační faktor je tedy y/x.

Vynásobená rovnice má tvar $(2x + y^3)\,dx + 3xy^2\,dy$; lehce dopočteme $V = xy^3 + x^2$.

Poznámka. Klíčem je hledání integračního faktoru ve správném tvaru. V učebnicových příkladech vesměs funguje μ jako funkce x, y, $x+y$, xy či x/y.

Řešte rovnice ve tvaru totálního diferenciálu.

Není-li řečeno jinak, hledejte integrační faktor jako funkci x nebo y.

24. $\frac{dx}{y} - \frac{x\,dy}{y^2} = 0.$

25. $\frac{y\,dx}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\,dy = 0.$

26. $-\frac{y\,dx}{x^2+y^2} + \frac{x\,dy}{x^2+y^2} = 0.$

27. $\cos(x+1)\,dx = 0.$

28. $\frac{\sqrt{y}\,dx}{\sqrt{-(x-1)(x+1)}} + \frac{\left(\arcsin(x)+2\sqrt{y}\right)dy}{2\sqrt{y}} = 0.$

29. $-ye^{\frac{y}{x}}x^{-2}\,dx + e^{\frac{y}{x}}x^{-1}\,dy = 0.$

30. $\left(\frac{y}{x^2} - x^{-2}\right)dx + \frac{dy}{x} = 0.$

31. $(y^2 - y)\,dx + xy\,dy = 0.$

32. $-\sin(x)\cos(y)\,dx - (\cos(y))^2\,dy = 0.$

33. $-\sin(xy)\,dx - \frac{\sin(xy)x\,dy}{y} = 0.$

34. $\left(x^{-1} + \frac{y}{x}\right)dx + (1 + x^{-1})\,dy = 0.$

35. $\left(\frac{2x}{y^2} - \frac{1}{yx^2}\right)dx + \left(3 + \frac{1}{y^2x}\right)dy = 0.$

36. $\left(-\frac{y^2}{x^2} + 1\right)dx + \left(2\,y^3 - \frac{2x}{y}\right)dy = 0.$

37. $\frac{dx}{xy} + 2\,\frac{dy}{x} = 0$, $\mu = \mu(xy)$.

38. $-y^3x^2\,dx + \left(-x^2 - x^3y^2 - \frac{2x^2}{y}\right)dy = 0$, $\mu = \mu(xy)$.

39. $\left(-\frac{1}{x^4y^3} + \frac{1}{x^4y^2}\right)dx - \frac{dy}{y^4x^3} = 0$, $\mu = \mu(xy)$.

40. $\frac{dx}{xy^3} + \frac{dy}{yx^3} = 0$, $\mu = \mu(xy)$.

41. $\frac{x^3\,dx}{y^2} - \frac{x^2\,dy}{y^5} = 0$, $\mu = \mu(x/y)$.

42. $\left(-\frac{y}{x^3} + \frac{y^3}{x}\right)dx + 2\,y^2\,dy = 0$, $\mu = \mu(y/x)$.

43. $\frac{x\,dx}{y} + \left(-\frac{x^3}{y^5} - \frac{2x^2}{y^2}\right) dy = 0$, $\mu = \mu(x/y)$.

44. $\left(x^{-1} + \frac{y^2}{x^3}\right) dx + \left(-y^{-1} - \frac{y}{x^2}\right) dy = 0$, $\mu = \mu(y/x)$.

45. $\left(\frac{y}{x} - \frac{y\cos(x)}{x}\right) dx + \frac{y\,dy}{x} = 0$.

46. $(y^{-1} + x^{-1})\, dx + (y^{-1} + x^{-1})\, dy = 0$, $\mu = \mu(xy)$.

Výsledky.

24) $V = \frac{x}{y}$.

25) $V = y\sqrt{x}$.

26) $V = \arctan(\frac{y}{x})$.

27) $V = \sin(x+1)$.

28) $V = \arcsin(x)\sqrt{y} + y$.

29) $V = e^{\frac{y}{x}}$.

30) $\mu = x^2$, $V = xy - x$.

31) $\mu = y^{-1}$, $V = xy - x$.

32) $\mu = (\cos(y))^{-1}$, $V = \cos(x) - \sin(y)$.

33) $\mu = y$, $V = \cos(xy)$.

34) $\mu = x$, $V = x + y + xy$.

35) $\mu = y^2$, $V = x^2 + y^3 + \frac{y}{x}$.

36) $\mu = y^{-2}$, $V = x^{-1} + y^2 + \frac{x}{y^2}$.

37) $\mu = xy$, $V = x + y^2$.

38) $\mu = \frac{1}{x^2y^2}$, $V = y^{-1} - xy + y^{-2}$.

39) $\mu = x^2y^2$, $V = \frac{1}{xy} - x^{-1}$.

40) $\mu = x^3y^3$, $V = x^3 + y^3$.

41) $\mu = \frac{y^2}{x^2}$, $V = x^2 + y^{-2}$.

42) $\mu = \frac{x}{y}$, $V = x^{-1} + xy^2$.

43) $\mu = \frac{y^3}{x^3}$, $V = y^{-1} - \frac{y^2}{x}$.

44) $\mu = \frac{x}{y}$, $V = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$.

45) $\mu = \frac{x}{y}$, $V = x + y - \sin(x)$.

46) $\mu = xy$, $V = (x+y)^2$.