Rovnice ve tvaru totálního diferenciálu.

Studujeme rovnici

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0, \tag{8}$$

kde $M(x,y), N(x,y) : \Omega \to \mathbb{R}$ jsou spojité a $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina.

Poznámka. Názorně řečeno: řešením (8) jsou křivky, jejichž tečný vektor (dx, dy) je v každém bodě roviny kolmý na vektor (M, N).

Rovnici (8) lze chápat jako souhrnné vyjádření dvou (za jistých předpokladů ekvivalentních) ODR prvního řádu:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \tag{9}$$

pro neznámou funkci $y = y(x)$, nebo

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{N(x,y)}{M(x,y)} \tag{10}$$

pro neznámou funkci $x = x(y)$.

Pokud existuje $V = V(x,y)$ tak, že

$$\partial_x V = M\,, \qquad \partial_y V = N \tag{11}$$

(v tomto smyslu je (8) totálním diferenciálem V), jsou řešení rovnic (9), (10) implicitně vyjádřena podmínkou $V(x,y) = konst.$

Definice 3. Rovnice (8) se nazve exaktní, pokud M, N jsou C^1 a platí

$$\partial_y M = \partial_x N\,. \tag{12}$$

Poznámka. Pokud existuje $V \in C^2$ tak, že $\nabla V = (M, N)$, je (8) nutně exaktní.

Platí i obráceně: je-li (8) exaktní, existuje (alespoň lokálně) $V \in C^2$ tak, že (11) platí.

Postup řešení rovnice (8) je následující:

1. Je-li rovnice exaktní, dopočteme V tak, aby platilo (11); toto V určuje řešení ve smyslu předchozí diskuse.

2. Není-li exaktní, násobíme ji vhodnou nenulovou funkcí (tzv. *integrační faktor*) tak, aby byla exaktní, a postupujeme bodem 1.

Příklad 4. Máme rovnici $(e^x + y)\,dx + (x + 2y\cos y^2)\,dy = 0$, tj. $M = e^x + y$, $N = x + 2y\cos y^2$. Rovnice je exaktní, chceme tedy najít $V = V(x, y)$ tak, aby platilo (11).

$$\begin{aligned} \partial_x V(x,y) &= e^x + y \\ V(x,y) &= e^x + xy + C(y) \end{aligned}$$

Co se děje: y pro daný okamžik fixujeme, a užijeme větu, že dvě funkce (zde $V(x, y)$ a $e^x + xy$) mají stejnou derivaci (dle x), a tudíž se liší o konstantu C – ta ale obecně závisí na y, tedy $C(y)$.

Druhá rovnice v (11) implikuje

$$\begin{aligned} \partial_y V = x + C'(y) &= x + 2y\cos y^2 \\ C'(y) &= 2y\cos y^2 \\ C(y) &= \sin y^2 + c \end{aligned}$$

To, že x „zázračně“ vypadlo z rovnice pro $C(y)$, je právě důsledek exaktnosti. Výsledek: $V(x,y) = e^x + xy + \sin y^2$, tedy řešením jsou křivky implicitně zadané rovnicí

$$e^x + xy + \sin y^2 = c.$$

Příklad 5. Je dána rovnice $(x^2 + y)\,dx - x\,dy = 0$. Rovnice není exaktní. Zkoušíme integrační faktor ve tvaru $\mu = \mu(x)$. Podmínka exaktnosti vynásobené rovnice je

$$\partial_y\big\{(x^2 + y)\mu(x)\big\} = \partial_x\big\{ - x\mu(x)\big\}\,,$$

což se redukuje na $x\mu'(x) = -2\mu(x)$. Zde nehledáme obecné, nýbrž libovolné *nenulové* řešení, např. $\mu(x) = 1/x^2$. Vynásobená rovnice $(1 + y/x^2)\,dx - dy/x = 0$ je tedy exaktní, a dopočteme $V = x - y/x$.

Příklad 6. Uvažujme rovnici $(2x^2/y + xy^2)\,dx + 3x^2y\,dy = 0$. Rovnice není exaktní. Zkoušíme integrační faktor ve tvaru $\mu = \mu(x/y)$. Podmínka exaktnosti vynásobené rovnice je

$$\partial_y\Big\{\mu(x/y)\Big(\frac{2x^2}{y} + xy^2\Big)\Big\} = \partial_x\big\{\mu(x/y)3x^2y\big\}\,. \tag{13}$$

Uvědomme si, že $\partial_x\mu(x/y) = \mu'(x/y)/y$, $\partial_y\mu(x/y) = -\mu'(x/y)x/y^2$, dle věty o derivaci složené funkce. Po zjednodušení dostaneme

$$-\mu'(x/y)\cdot\frac{x}{y} = \mu(x/y)\,.$$

Tedy, nazveme-li proměnnou funkce μ jako 't', máme $-\mu'(t)t = \mu(t)$. Opět stačí nějaké nenulové řešení, např. $\mu(t) = 1/t$. Integrační faktor je tedy y/x.

Vynásobená rovnice má tvar $(2x + y^3)\,dx + 3xy^2\,dy$; lehce dopočteme $V = xy^3 + x^2$.

Poznámka. Klíčem je hledání integračního faktoru ve správném tvaru. V učebnicových příkladech vesměs funguje μ jako funkce x, y, $x + y$, xy či x/y.