Bernoulliho rovnice.

Definice 2. Rovnice

$$y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha}\,, \tag{3}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$, se nazývá Bernoulliho rovnice.

Postup řešení Bernoulliho rovnice je následující: násobením $(1-\alpha)y^{-\alpha}$ přejde na lineární rovnici

$$z' + (1-\alpha)a(x)z = (1-\alpha)b(x) \tag{4}$$

pro novou neznámou funkci $z(x) = [y(x)]^{1-\alpha}$.

Můžeme předpokládat, že $\alpha \neq 1$ (jinak by se jednalo o lineární rovnici); dále hledáme takto jen *nenulová* řešení. Nulová funkce je řešením vždy (je-li výraz $0^{\alpha} = 0$); případné napojení v bodě $y = 0$ je pak třeba diskutovat na závěr.

Příklad 3. Rovnice

$$y' - \frac{4y}{x} = x\sqrt{y}\,, \tag{5}$$

tj. $\alpha = 1/2$; substituce $z = y^{1-1/2} = \sqrt{y}$ vede na

$$z' - \frac{2z}{x} = \frac{x}{2}\,. \tag{6}$$

To je lineární ODR 1. řádu, kterou lehce vyřešíme pomocí integračního faktoru $1/x^2$, obecné řešení je $z = x^2(c + \ln\sqrt{|x|})$, platné v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

Nyní však POZOR: zpětné dosazení

$$y = z^2 = x^4(c + \ln\sqrt{|x|})^2 \tag{7}$$

dává funkci, která vyhoví původní rovnici (5) pouze za dodatečného předpokladu, že $c + \ln\sqrt{|x|} > 0$ (ověřte podrobně!); tj. v $(-\infty, -\exp(-2c))$ a $(\exp(2c), +\infty)$.

V čem je zádrhel: v tomto okamžiku přecházím od rovnice (6) zpět k (5), ovšem $y = z^2$ je opačná operace k $z = \sqrt{y}$ pouze za podmínky $z \geq 0$; pro $z < 0$ by bylo $z = -\sqrt{y}$ a tudíž (6) by vypadala jinak.

Snad jednodušší je si pamatovat, že $z = \sqrt{y}$ je nutně nezáporné, tudíž hledám jen nezáporná řešení rovnice (6). (Fakticky musím uvažovat pouze kladná z, neboť při přechodu od (5) k (6) dělím funkcí $z = \sqrt{y}$.)

Dále si rozmyslím, že $y = 0$ je řešení původní rovnice (5) v maximálních intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$. Toto řešení lze napojit v bodech $-\exp(-2c)$ a $\exp(2c)$.

Poznámka. Podobná situace není při řešení ODR vzácností: funkce spočítaná formálním, bezmyšlenkovitým postupem je řešení často na menší množině než její na první pohled zřejmý „definiční obor“.