Úlohy na integrační faktor

„Integrační faktor“ je vhodně zvolená funkce, kterou násobíme studovanou rovnici, aby se stala derivací (obecněji totálním diferenciálem) „něčeho“. Tím dostaneme (implicitně zadané) řešení.

Řešení lineárních rovnic 1. řádu se pomocí integračního faktoru redukuje na výpočet dvou primitivních funkcí. Na lineární rovnice 1. řádu jsou formálně lehce převoditelné Bernoulliho rovnice.

Zobecněním lineárních ODR 1. řádu jsou tzv. rovnice ve tvaru totálního diferenciálu.

Lineární ODR 1. řádu

Definice 1. Lineární ODR 1. řádu rozumíme rovnici

$$y' + a(x)y = b(x)\,. \tag{1}$$

Rovnici považujeme za *lineární*, protože lineární je závislost (levé strany) na neznámé funkci $y = y(x)$; koeficienty rovnice $a(x)$, $b(x)$ jsou obecně *nelineární* funkce x.

Věta 1 (Řešení lineární ODR 1. řádu.)**.** *Je dána rovnice* (1)*. Nechť* $a(x)$, $b(x)$ *jsou spojité v* I*, nechť* $A(x) = \int a(x)\,dx$*,* $B(x) = \int b(x) \exp A(x)\,dx$ *v* I*. Nechť* $c \in \mathbb{R}$ *je libovolné. Potom*

$$y(x) = \exp(-A(x))\big[B(x) + c\big]$$

je řešení rovnice (1) *v* I*. Naopak: všechna řešení rovnice* (1) *v* I *mají tento tvar.*

Poznámka. Výraz $\exp A(x)$ se nazývá integrační faktor. Důkaz samotné věty je velmi jednoduchý (a je užitečné jej znát při řešení příkladů): Násobíme rovnici $\exp A(x)$ a vzhledem k tomu, že $\big(\exp A(x)\big)' = a(x)\exp A(x)$, dostáváme

$$\begin{aligned} y'(x)\exp A(x) + y(x)\big(\exp A(x)\big)' &= b(x)\exp A(x) \\ \big(y(x)\exp A(x)\big)' &= B'(x) \end{aligned}$$

Užijeme tvrzení, že $f'(x) = g'(x)$ v I, právě když $f(x) = g(x) + c$ pro vhodné $c \in \mathbb{R}$.

Poznámka. Protože se jedná o lineární úlohu, můžeme k řešení použít také *metodu variace konstant.* Příslušná homogenní rovnice zní

$$y' = -a(x)y;$$

její obecné řešení má tedy tvar $y = c\exp(-A(x))$, kde $A(x) = \int a(x)dx$ stejně jako výše. Nyní hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$y_p = c(x)\exp(-A(x)).$$

Protože $y_p' = c'(x)\exp(-A(x)) - c(x)a(x)\exp(-A(x))$, po dosazení do rovnice a jednoduché úpravě dostaneme

$$c'(x) = b(x)\exp A(x)$$

tedy $c(x) = \int b(x)\exp A(x)dx$. Obdržené řešení má týž tvar jako ve Větě 1.

Příklad 1. Rovnice $y' + y\cos x = (1+x)e^{-\sin x}$.

Řešení. Integrační faktor je $e^{\sin x}$, rovnice po vynásobení přejde na

$$\begin{aligned} y'e^{\sin x} + y\cos xe^{\sin x} &= 1+x \\ \left(ye^{\sin x}\right)' &= (x+\frac{x^2}{2})'; \end{aligned}$$

odtud obecné řešení $y(x) = (x + \frac{x^2}{2} + C)e^{-\sin x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 2. Rovnice $xy' - 3y = x^4$.

Řešení. Uvedeme na tvar (1); což lze v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$:

$$y' - \frac{3}{x}y = x^3. \tag{2}$$

Protože

$$\int \frac{-3}{x}dx = -3\ln|x| = \ln|x|^{-3},$$

obdržíme integrační faktor $|x|^{-3}$; budeme ale pracovat raději s funkcí x^{-3} – jen změna znaménka na intervalu $(-\infty, 0)$. Násobení rovnice (2) dává

$$\begin{aligned} \frac{y'}{x^3} - \frac{3}{x^4}y &= 1 \\ \left(\frac{y}{x^3}\right)' &= x' \\ \frac{y}{x^3} &= x + C \\ y &= x^3(x+C) \end{aligned}$$

Výpočet jsme prováděli za předpokladu $x \neq 0$; splnění rovnice je tak zaručeno na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$. Díky spojitosti y, y' je rovnice splněna i v bodě $x = 0$. Protože $y(0) = y'(0) = 0$ nezávisle na C, lze řešení s různými konstantami v počátku napojit. Obecné řešení má tedy tvar

$$y(x) = \begin{cases} x^3(x + C_1), & x < 0 \\ x^3(x + C_2), & x \geq 0 \end{cases}$$

kde C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$ jsou libovolná.