

Bifurkace

Je dána rovnice

$$x' = f(x, \mu), \quad (1)$$

kde $\mu \in \mathbb{R}$ je parametr, $x \in \mathbb{R}^n$ neznámá funkce. Předpokládáme, že pravá strana f je hladká.

Definice 1 (Neformální.). Řekneme, že rovnice (1) má v bodě (x_0, μ_0) bifurkaci, jestliže chování řešení v okolí bodu x_0 se *podstatným způsobem* změní v okamžiku $\mu = \mu_0$.

Podstatnou změnou chování rozumíme typicky vznik/zánik stacionárního bodu či změnu jeho stability.

Základní 1d bifurkace.

V následujícím uvedeme základní typy jedno-dimenzionálních bifurkací, tedy případ $x \in \mathbb{R}$. Bifurkace znázorňujeme na tzv. bifurkačním diagramu: do roviny (μ, x) vykresluje stacionární body, neboli řešení rovnice $f(x, \mu) = 0$ (v grafu modrou barvou). Je zvykem stabilní ekvilibria značit plnou čarou, nestabilní přerušovanou čarou. Směr průběhu řešení při pevném μ – odpovídá znaménku $f(x, \mu)$ – je naznačen šipkami.

Příklad 1. Bifurkace „sedlo-uzel“ vzniká u rovnice $x' = \mu - x^2$. Pro $\mu < 0$ nejsou žádné stacionární body; pro $\mu = 0$ se v počátku objeví jeden stacionární bod, který se pro $\mu > 0$ rozpadne na dva: stabilní a nestabilní (Obrázek 1).

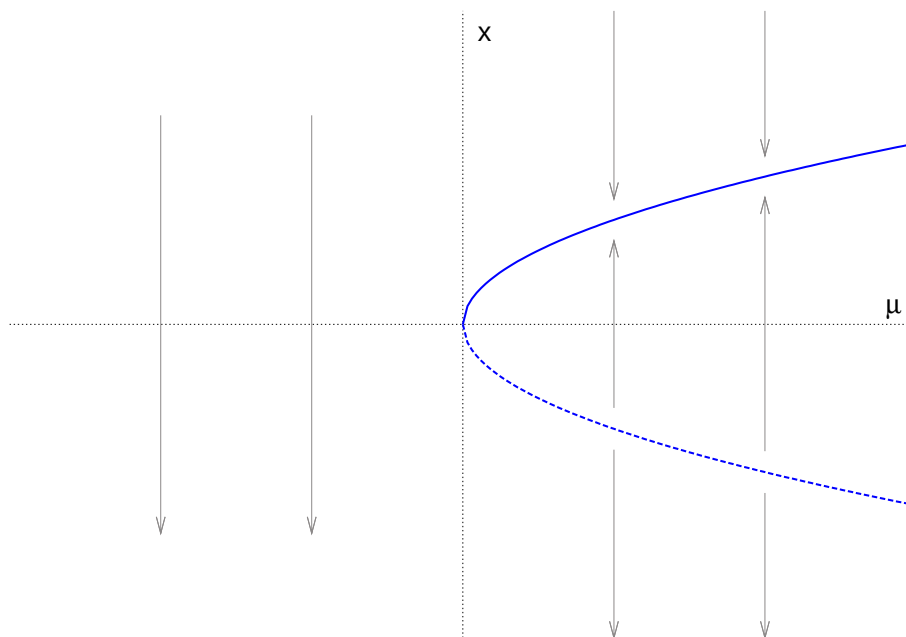
Poznámka. Termín „sedlo-uzel“ je v jednodimenzionálním případě poněkud matoucí; analogický případ v $\mathbb{R}^2$ odpovídá situaci, kdy vznikne nový stacionární bod, který se vzápětí rozpadne na (stabilní) uzel a (nestabilní) sedlo. Viz Příklad 5 níže.

Příklad 2. „Transkritická“ bifurkace se objeví u rovnice $x' = \mu x - x^2$. Pro $\mu < 0$ vidíme stabilní a nestabilní ekvilibrium, která se k sobě s rostoucím μ přibližují. V bodě $\mu = 0$ se jejich dráhy protnou a typ stability se vymění (Obrázek 2).

Příklad 3. „Vidličková“ bifurkace je kombinací předchozích. Příkladem je rovnice $x' = \mu x - x^3$. Pro $\mu < 0$ máme stabilní stacionární bod, z kterého se pro $\mu = 0$ oddělí dva nové, zatímco původní bod ztrácí stabilitu (Obrázek 3).

Poznámka. Ve všech uvedených případech jsou v bodě bifurkace, tedy pro $(x_0, \mu_0) = (0, 0)$, splněny rovnice

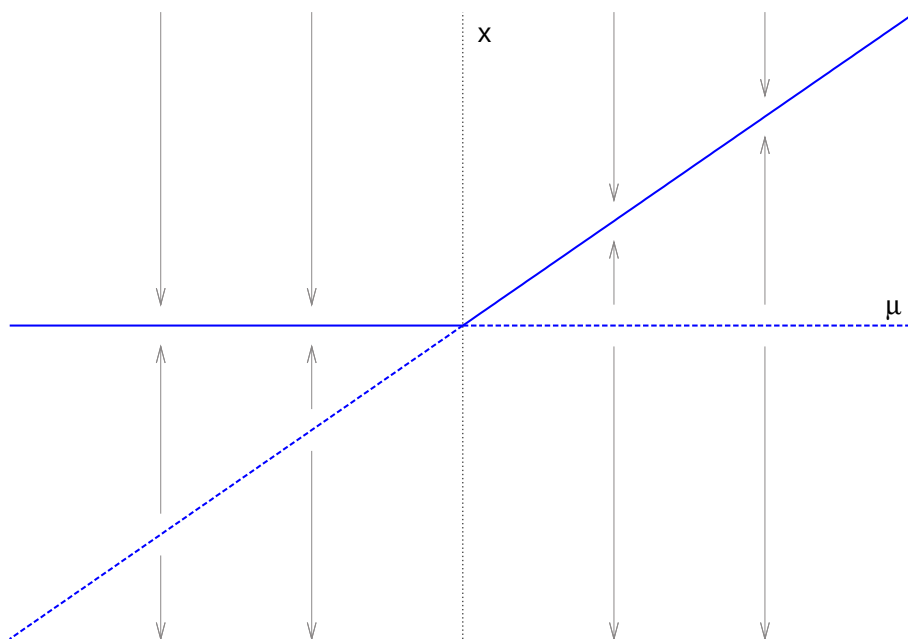
$$\begin{aligned} f(x, \mu) &= 0 \\ \partial_x f(x, \mu) &= 0 \end{aligned}$$



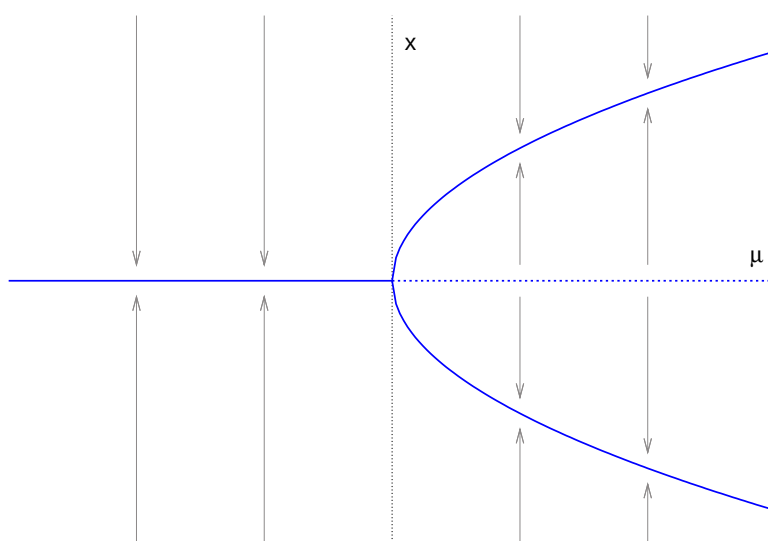
Obrázek 1: Bifurkace „sedlo-uzel“ 1d

Lze ukázat, že (pro jednodimenzionální rovnici) jsou to *nutné* podmínky bifurkace. Další podstatná vlastnost: v žádném okolí bodu bifurkace nelze množinu $\{f(x, \mu) = 0\}$ vyjádřit jako graf funkce proměnné μ .

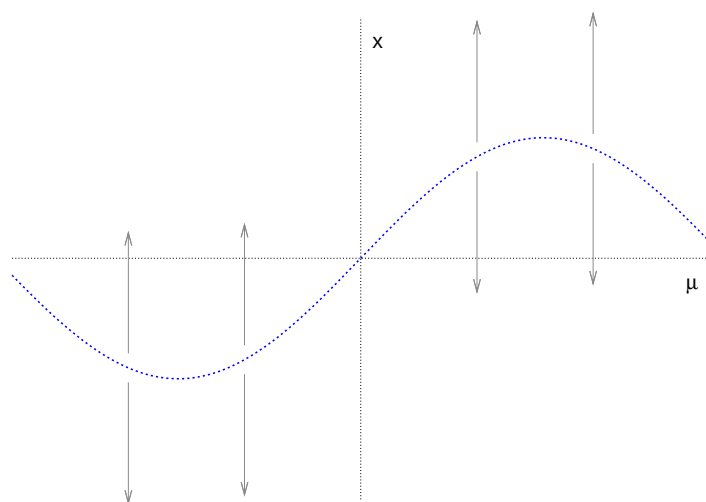
Příklad 4 (Ne-bifurkace.). Rovnice $x' = x - \sin \mu$ má jediný stacionární bod $x = \sin \mu$. Při změně μ se tento bod posouvá, je nicméně stále nestabilní. Zde tedy nedochází k žádné bifurkaci (Obrázek 4).



Obrázek 2: „Transkritická“ bifurkace



Obrázek 3: „Vidličková“ bifurkace



Obrázek 4: Žádná bifurkace.

Řešte úlohy na bifurkace.

1. Načrtněte bifurkační diagramy, určete typy bifurkací:

(a) $x' = \mu - x^2$

(e) $x' = \mu - \sin x$

(b) $x' = \mu + x^2 - x^3$

(f) $x' = \sin \mu - x$

(c) $x' = \mu^2 + x^2 - 1$

(g) $x' = \mu^2 - x^2$

(d) $x' = 1 - \mu x$

(h) $x' = \mu x$

2. Necht' polynom $p(x)$ má v bodě x_0 jednoduchý kořen, tj. $p(x_0) = 0$, $p'(x_0) \neq 0$. Potom polynom $\tilde{p}(x)$ s nepatrně změněnými koeficienty má blízko x_0 opět jednoduchý kořen.

Návody a výsledky.

- 1)** (a) sedlo-uzel v bodě $(\mu, x) = (0, 0)$
(b) sedlo-uzel v $(0, 0)$ a $(-4/27, 2/3)$
(c) sedlo-uzel v $(-1, 0)$ a $(1, 0)$
(d) žádné bifurkace
(e) sedlo-uzel v $(-1, (2k-1)\pi/2)$, $(1, (2k+1)\pi/2)$
(f) žádné bifurkace
(g) transkritická v $(0, 0)$
(h) bifurkace v bodě $(0, 0)$
2) Použijte větu o implicitní funkci na

$$F(a_0, \dots, a_n, x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots a_0$$

Bifurkace v rovině.

Příklad 5 (Bifurkace sedlo-uzel – vznik symbiózy.). Zabýváme se soustavou rovnic

$$a' = a(K - a) + \frac{ap}{p+1} \quad (2)$$

$$p' = -\frac{p}{2} + \frac{ap}{p+1} \quad (3)$$

popisující symbiózu mezi rostlinou p a hmyzem (opylovačem) a . Modře je vyznačen člen popisující vzájemnou pozitivní vazbu. V nepřítomnosti hmyzu ($a = 0$) rostliny exponenciálně hynou, zatímco pro $p = 0$ (žádné rostliny) má a limitu K (=přirozená kapacita prostředí).

Studujeme chování řešení v prvním kvadrantu ($a, p \geq 0$) v závislosti na parametru K . Systém má vždy stacionární body $(0, 0)$ a $(K, 0)$; striktně uvnitř prvního kvadrantu platí

$$a' = 0 \iff p = \frac{a - K}{K + 1 - a} \quad (4)$$

$$p' = 0 \iff p = 2a - 1 \quad (5)$$

Současné splnění těchto rovnic odpovídá existenci dalších ekvilibrií a vede na kvadratickou rovnici

$$2a^2 - 2a(K + 1) + 1 = 0 \quad (6)$$

s diskriminantem $D = 4(K + 1)^2 - 8$, jenž je roven 0 právě když K nabývá kritické hodnoty

$$K_0 = \sqrt{2} - 1.$$

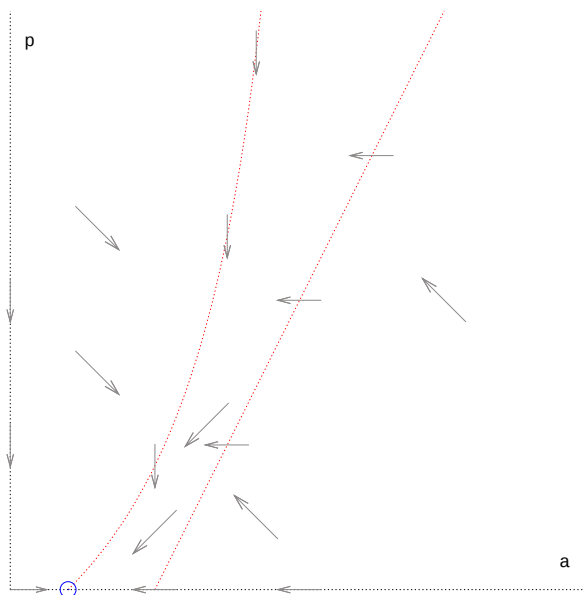
Rozlišujeme tři případy (viz Obrázky 5, 6, 7).

(i) $K < K_0$ – rovnice (6) nemá řešení, tj. křivky (4), (5) (v obrázku červené) se neprotínají. Z vyšetření směru průběhu řešení (šedé šipky) je patrné, že všechna řešení mají pro $t \rightarrow \infty$ limitu v bodě $(K, 0)$ (modrý kroužek).

(ii) Pro $K = K_0$ se křivky (4), (5) dotýkají, čímž vzniká stacionární bod

$$(x_0, y_0) = (1/\sqrt{2}, \sqrt{2} - 1).$$

Matice linearizace v tomto bodě má jedno nulové a jedno záporné vlastní číslo. Stabilní varieta (odpovídající zápornému vlastnímu číslu) je zhruba naznačena šipkami; řešení ležící nad nimi (nebo v sektoru B) mají za limitu bod (x_0, y_0) , zatímco řešení v sektoru A směřují opět do $(K, 0)$, tedy (x_0, y_0) není stabilní.



Obrázek 5: Subkritický případ $K < K_0$

(iii) Další zvětšení K vede k rozdělení (x_0, y_0) na stabilní uzel a nestabilní sedlo. Konkrétně pro $K = K_0 + 0.05$ máme

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &\doteq (0.542, 0.085) && \text{(sedlo)} \\ (x_2, y_2) &\doteq (0.922, 0.844) && \text{(uzel)} \end{aligned}$$

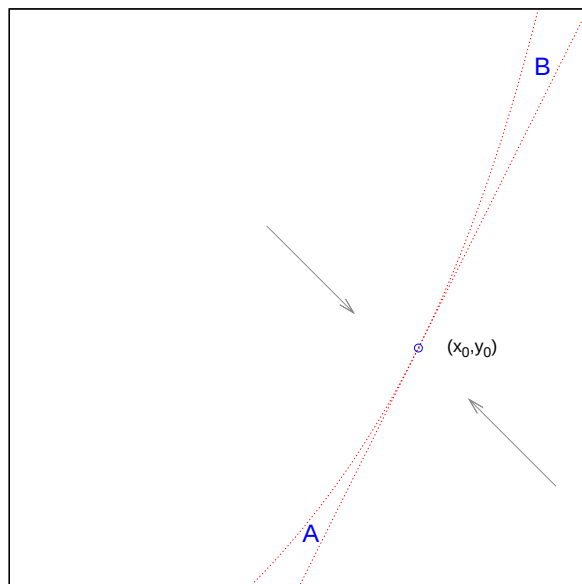
Řešení v sektoru C směřují k bodu (x_2, y_2) .

Poznámka. Všimněte si, že v okamžiku bifurkace ($K = K_0$) stacionární bod (x_0, y_0) není hyperbolický. Lze ukázat, že to je nutná podmínka bifurkace, neboť hyperbolické stacionární body jsou robustní (chování řešení v jejich okolí se nemění při hladké perturbaci soustavy.)

Příklad 6 (Jednoduchá bifurkace sedlo-uzel). Uvažujme soustavu

$$\begin{aligned} x' &= (1 + \varepsilon)x - y + x^2 \\ y' &= (1 + \varepsilon)y - x + y^2 \end{aligned}$$

Pro $\varepsilon = 0$ je v počátku (jediný) stacionární bod, který je nestabilní a nehyperbolický (spektrum linearizace $\{0, 2\}$). Obrázek 8 – izočáry $\{y' = 0\}$ červené, $\{x' = 0\}$ modré; řešení černé.



Obrázek 6: Kritický případ $K = K_0$

Pro $\varepsilon > 0$ malé se počátek stává nestabilním uzlem (spektrum $\{\varepsilon, 2 + \varepsilon\}$). Vzniká další stacionární bod $(-\varepsilon, -\varepsilon)$: sedlo se spektrem $\{-\varepsilon, 2 - \varepsilon\}$. Viz Obrázek 9; orbit spojující ekvilibria je světle modrý.

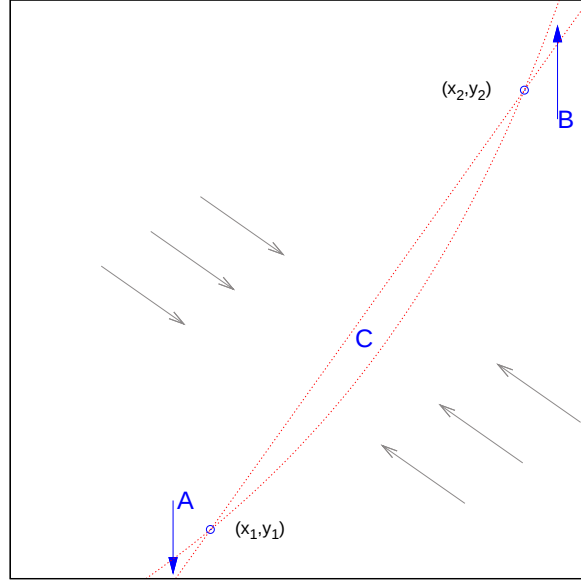
Příklad 7 (Porušení homoklinického orbitu). Uvažujme systém

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= \varepsilon y + x - x^2 \end{aligned}$$

Pro $\varepsilon = 0$ máme dva stacionární body : počátek (sedlo se spektrem $\{\pm 1\}$) a bod $(1, 0)$, jehož stabilitu linearizací nelze určit (spektrum $\{\pm i\}$). Funkce $V(x, y) = y^2 - x^2 + 2x^3/3$ je první integrál, neboli každé řešení splňuje $V(x, y) = C$ s vhodným C , viz Obrázek 10. Pro $C = 0$ dostáváme počátek a příslušnou stabilní (zelená) a nestabilní (červená) varietu, splývající v pravé polorovině v jeden homoklinický orbit (tmavě modrá).

Pro $C \in (-1/3, 0)$ jsou $V(x, y) = C$ jednoduché uzavřené křivky, odpovídající periodickým řešením kolem bodu $(1, 0)$. Odsud si lehce rozmyslíme, že tento bod je stabilní, leč není asymptoticky stabilní.

Pro $\varepsilon > 0$ resp. $\varepsilon < 0$ je nyní $V(x, y)$ rostoucí resp. klesající podél řešení. Bod $(1, 0)$ je nestabilní resp. asymptoticky stabilní.



Obrázek 7: Superkritický případ $K > K_0$

Homoklinický orbit se „roztrhne“. Pro $\varepsilon > 0$ se stabilní část stane heteroklinickým orbitem, spojujícím počátek s (nyní nestabilním) bodem $(1, 0)$, na Obrázku 11(a) zeleně. Nestabilní část (červená) utíká do nekonečna.

Pro $\varepsilon < 0$ spojuje nyní nestabilní varieta (Obrázek 11(b), červená) počátek se (stabilním) ekvilibriem $(1, 0)$; stabilní část variety (zelená) přibíhá z nekonečna.

Poznámka. Pro $\varepsilon = 0$ nastává v bodě $(1, 0)$ takzvaná *Hopfova bifurkace*, kterou se budeme podrobněji zabývat níže.

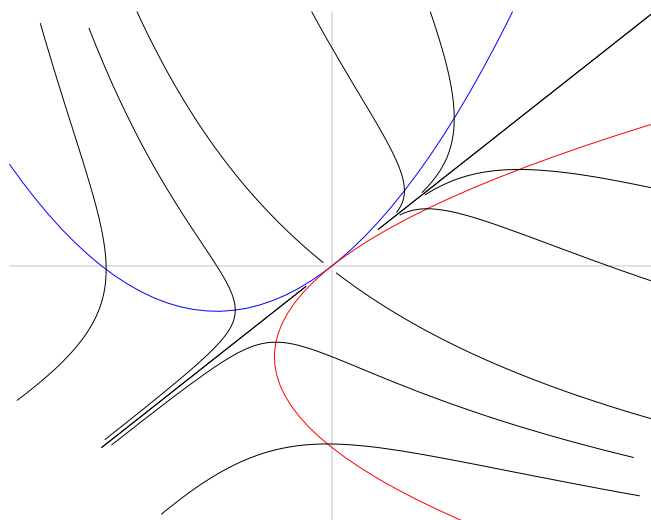
Příklad 8 (Porušení heteroklinického orbitu). Uvažujeme soustavu

$$\begin{aligned} x' &= \lambda + 2xy \\ y' &= 1 + x^2 - y^2 \end{aligned}$$

Pro $\lambda = 0$ vidíme řešení na Obrázku 12(a). Množina $x' = 0$ resp. $y' = 0$ je vyznačena modře resp. červeně. Existují dva stacionární hyperbolické body $(0, \pm 1)$. Jde o sedla spojená heteroklinickým orbitem (zelená).

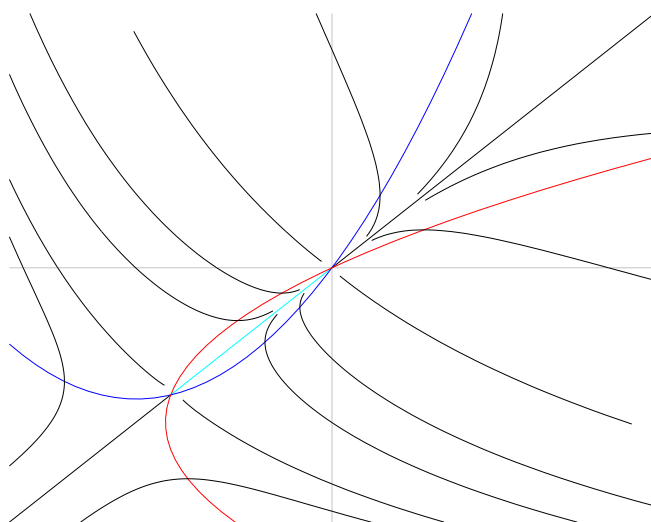
Pro $\lambda < 0$ se oba sedlové body mírně posunou, typ stability zůstane zachován. Heteroklinický orbit se však stává globálně definovaným řešením (Obrázek 12(b), zelená).

Poznámka. Homoklinický orbit = orbit spojující stabilní a nestabilní varietu *téhož* stacionárního bodu (*ομοος*, řecky „stejný“). Heteroklinický orbit =

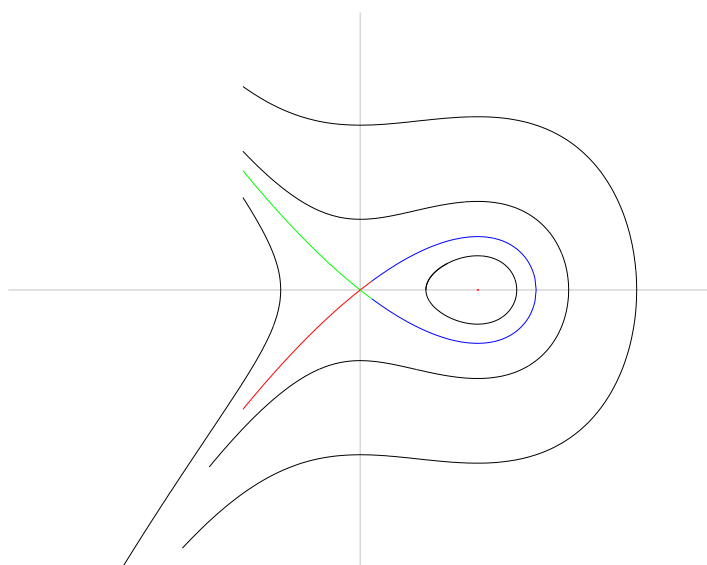


Obrázek 8: Příklad 6 pro $\varepsilon = 0$

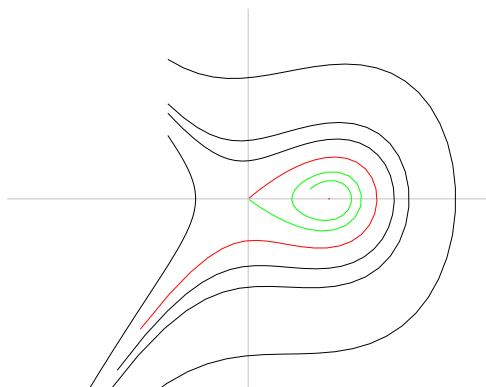
orbit spojující stabilní a nestabilní varietu *dvou různých* stacionárních bodů ($\varepsilon\tau\varepsilon\rho\varsigma$, řecky „různý“).



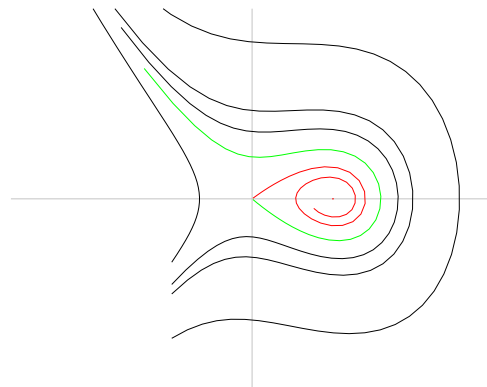
Obrázek 9: Příklad 6 pro $\varepsilon > 0$



Obrázek 10: Příklad 7 pro $\varepsilon = 0$

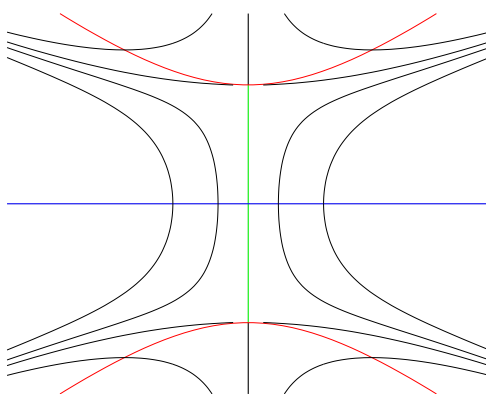


(a) $\varepsilon > 0$

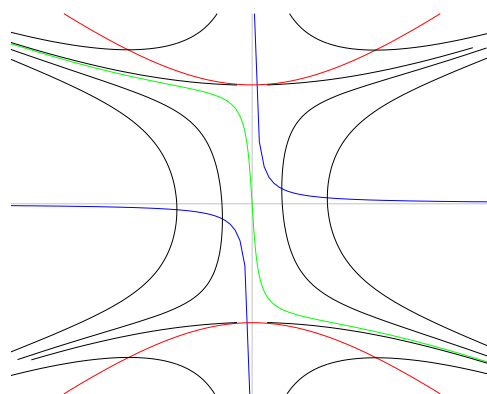


(b) $\varepsilon < 0$

Obrázek 11: Příklad 7 pro $\varepsilon \neq 0$



(a) $\lambda = 0$



(b) $\lambda < 0$

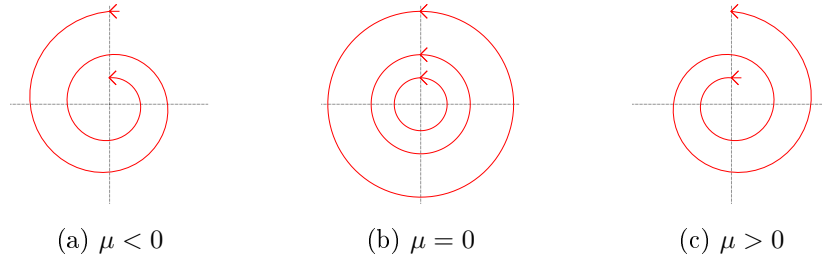
Obrázek 12: Příklad 8

Hopfova bifurkace.

Motivační příklad. Uvažujme lineární systém

$$\begin{aligned}x' &= \mu x - y \\ y' &= x + \mu y.\end{aligned}$$

Spektrum matice je $\{\mu \pm i\}$; počátek ztrácí stabilitu v okamžiku $\mu = 0$. Průběh řešení vidíme na Obrázku 13.



Obrázek 13: Ztráta stability lineární soustavy

Řešení běží po spirále, jejíž rychlost zavínavání/rozvínavání se mění s parametrem μ . Fakt, že pro vhodnou kritickou hodnotu μ spirála degeneruje v uzavřenou křivku, tj. objeví se periodická řešení, se jeví jako „robustní“, tj. měl by nastat i za přítomnosti členů vyššího řádu. Přesně to je obsahem Hopfovy věty o bifurkaci.

Věta 1 (Hopf.). *Pro (x, y, μ) v okolí $(0, 0, 0)$ uvažujeme systém*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A_\mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, y, \mu) \\ g(x, y, \mu) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

kde matice A_μ závisí na parametru μ . Předpokládejme, že $\sigma(A_\mu) = \{\alpha(\mu) \pm i\omega(\mu)\}$, kde $\alpha(\cdot)$, $\omega(\cdot)$ jsou C^2 funkce a platí:

$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha'(0) \neq 0, \quad \omega(0) \neq 0. \quad (8)$$

Funkce f , g jsou poruchy vyššího řádu, tj.

$$f = 0, \quad g = 0, \quad \nabla_{x,y} f = 0, \quad \nabla_{x,y} g = 0, \quad \text{v bodě } (0, 0, \mu).$$

Potom existují $\delta, \Delta > 0$ a C^1 funkce $\varphi : (0, \delta) \rightarrow (-\Delta, \Delta)$ taková, že pro každé $a \in (0, \delta)$ má systém (7) při volbě $\mu = \varphi(a)$ netriviální periodické řešení, procházející bodem $(x, y) = (a, 0)$.

Klíčový je předpoklad (8) zaručující, že spektrum překročí imaginární osu nenulovou rychlostí a při striktně nenulové imaginární části.

Hlavní výsledek věty – existence netriviálních periodických řešení blízko počátku – z praktického hlediska mnoho neříká. Proto se hodí následující zpřesnění (s mimořádně komplikovaným důkazem).

Věta 2. *Nechť jsou splněny předpoklady Věty 1, nechť navíc*

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Potom existuje hladká záměna souřadnic taková, že $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ se chová kvalitativně stejně jako řešení rovnice

$$r' = d\mu r + ar^3, \quad (9)$$

kde $d = \alpha'(0)$ a konstantu a lze vypočíst ze vztahu

$$16a = f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy} + \frac{1}{\omega_0} [f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}],$$

kde f_{xy} atd. značí příslušnou parciální derivaci, vypočtenou v bodě $(x, y, \mu) = (0, 0, 0)$.

Příklad 9. Mějme rovnice

$$\begin{aligned} x' &= -\mu x - y \\ y' &= x + y^3 \end{aligned}$$

To je systém tvaru (7) s $f = 0$, $g = y^3$ a

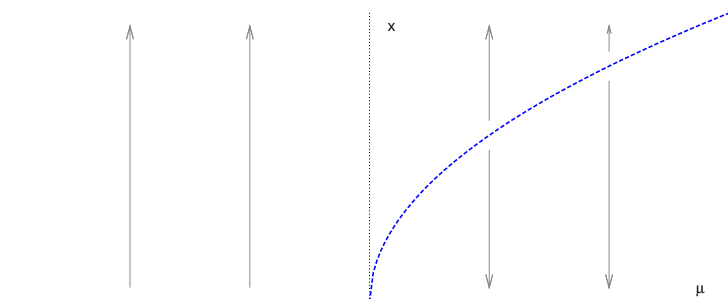
$$A_\mu = \begin{pmatrix} -\mu & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Spektrum A_μ je $\{-\mu/2 \pm i\sqrt{4 - \mu^2/4}\}$ (pro μ malá), předpoklady obou vět jsou splněny.

Máme $d = -1/2$, $\omega_0 = 1$ a $a = 3/8$; rovnice (9) dostává tvar

$$r' = r \left(-\frac{\mu}{2} + \frac{3}{8}r^2 \right).$$

Průběh řešení načrtneme do bifurkačního diagramu v rovině (μ, r) . Pro $r > 0$ odpovídá podmínka $r' = 0$ kružnici, tj. netriviálnímu periodickému řešení. Tato řešení se objeví pro $\mu > 0$ a jsou nestabilní.



Poznámka. Věta 2 speciálně umožňuje určit stabilitu počátku pro $\mu = 0$, kdy se (9) redukuje na $r' = ar^3$. Všimněte si, že v daném případě klasické věty o linearizované stabilitě nelze použít, neboť spektrum matice je ryze imaginární. O stabilitě tedy rozhodnou členy vyššího řádu a je pozoruhodné, že veškerá informace je obsažena v jediné konstantě a .

To lze použít i ve zjednodušeném případě, kdy bifurkační parametr ignorujeme (resp. je roven 0).

Příklad 10. Máme systém

$$\begin{aligned}x' &= -y + x^2 \\ y' &= x + x^2\end{aligned}$$

Matice linearizace v počátku má žádaný tvar

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Snadný výpočet ukazuje, že $a = -1/4$, a tedy počátek je stabilní. Pokuste se odvodit stabilitu počátku jinými metodami – není to snadné!

Příklad 11. Uvažujme rovnici

$$x'' + (x^2 - \mu)x' + 2x + x^3 = 0,$$

kterou obvyklou substitucí $y = x'$ převedeme na systém

$$x' = y, \tag{10}$$

$$y' = -2x + \mu y - x^2 y - x^3. \tag{11}$$

Jsou splněny předpoklady Věty 1, nikoliv však Věty 2, neboť

$$A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & \mu \end{pmatrix}$$

tedy $\sigma(A_\mu) = \{\mu/2 \pm i/2\sqrt{8-\mu^2}\}$, avšak A_μ nemá požadovaný antisymetrický tvar pro $\mu = 0$. Problém řeší následující

Pomocný výpočet. Je-li A reálná matice 2×2 se spektrem $\{\alpha \pm i\omega\}$, je nutně podobná matici

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix}$$

Matici přechodu spočteme následujícím trikem: najdeme vektor $U \in \mathbb{C}^2$ takový, že $AU = (\alpha - i\omega)U$. Rozklad na reálnou a imaginární část $U = u + iv$, kde $u, v \in \mathbb{R}^2$, dává

$$\begin{aligned} Au &= \alpha u + \omega v \\ Av &= -\omega u + \alpha v \end{aligned}$$

jinými slovy, A má vůči bázi $\{u, v\}$ tvar B . Pro transformační matici T se sloupci u, v (v tomto pořadí) tedy platí

$$A = TBT^{-1}, \quad B = T^{-1}AT.$$

Má-li tedy původní rovnice tvar

$$X' = AX + F(X), \tag{12}$$

kde $X \in \mathbb{R}^2$, vede substituce $X = TY$ čili $Y = T^{-1}X$ na rovnici

$$Y' = BY + T^{-1}F(TY). \tag{13}$$

Pokračování příkladu. V našem konkrétním případě má A_0 spektrum $\{\pm i\sqrt{2}\}$, tedy $U = (U_1, U_2)$ hledáme z rovnice

$$\begin{pmatrix} -i\sqrt{2} & -1 \\ 2 & -i\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Možné řešení je $U = (i\sqrt{2}, 2)$; odpovídající transformační matice jsou

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Chápeme nyní (10-11) jako systém (12), tj. $X = (x, y)$, $A = A_\mu$ a

$$F(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ -x^2y - x^3 \end{pmatrix}.$$

Substitucí $X = TY$, kde $Y = (u, v)$, dostaneme – viz (13) – pro $\mu = 0$:

$$\begin{aligned}u' &= -\sqrt{2}v - 2uv^2 - \sqrt{2}v^3, \\v' &= \sqrt{2}u,\end{aligned}$$

což je požadovaný tvar. Lze aplikovat Větu 2, dle které se $r = \sqrt{u^2 + v^2}$ chová jako řešení rovnice

$$r' = d\mu r + ar^3.$$

Zde $d = 1/2$, $a = -1/4$, odkud počátek stabilní pro $\mu \leq 0$, zatímco pro $\mu > 0$ je počátek nestabilní a objeví se stabilní periodické orbity o poloměru cca $r = \sqrt{2\mu}$.

Řešte úlohy na Hopfovou bifurkaci.

3. Ukažte, že systém

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y)$$

při polárních souřadnicích $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ přechází na

$$\begin{aligned} r' &= \cos \varphi f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) + \sin \varphi g(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \\ r\varphi' &= -\sin \varphi f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) + \cos \varphi g(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \end{aligned}$$

4. Ukažte pomocí polárních souřadnic, že pro μ blízká 0 se u systému

$$\begin{aligned} x' &= \mu x - y + f(x, y) \\ y' &= x + \mu y + g(x, y) \end{aligned}$$

objeví v okolí bodu $(0, 0)$ netriviální periodická řešení. Nakreslete bifurkační diagram pro (r, μ) . — Porovnejte s patřičnými větami o Hopfově bifurkaci.

(a)

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x\sqrt{x^2 + y^2} \\ g(x, y) &= y\sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -y\sqrt{x^2 + y^2} \\ g(x, y) &= x\sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -x(x^2 + y^2) \\ g(x, y) &= -y(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

5. Ukažte existenci Hopfovy bifurkace v bodě $(x, y, \mu) = (0, 0, 0)$ pro dané systémy. Vyšetřete stabilitu počátku a periodických řešení.

(a) $x' = -\mu x - y, y' = x + y^3$

(b) $x'' + (x')^3 - \mu x' + x = 0$

(c) $x' = \mu x + y + \mu x^2 - x^2 - xy^2, y' = -x + y^2$

(d) $x' = y - x^3, y' = -x + \mu y - x^2 y$

(e) $x' = \mu x + y - x^3 \cos x, y' = -x + \mu y$

(f) $x' = y - 2x^2, y' = -x + \mu y - x^2(1 + y)$

(g) $x' = -\mu x + y + x^2, y' = -x + x^2 - yx^2$

Návody a výsledky.

3) Vyjděte ze vztahů

$$\begin{aligned}x' &= r' \cos \varphi - r \varphi' \sin \varphi \\y' &= r' \sin \varphi + r \varphi' \cos \varphi\end{aligned}$$

- 4) (a) $r' = \mu r + r^2$, $\varphi' = 1$; kružnice $r = -\mu$ pro $\mu < 0$
(b) $r' = \mu r$, $\varphi' = 1 + r$; kružnice (s libovolným poloměrem) pro $\mu = 0$
(c) $r' = \mu r - r^3$, $\varphi' = 1$; kružnice $r = \sqrt{\mu}$ pro $\mu > 0$
- 5) (a) $d = -1/2$, $\omega_0 = -1$, $a = 3/8$; tedy $r' = r/2(-\mu + 3r^2/4)$; nestabilní počátek pro $\mu \leq 0$; stabilní počátek a nestabilní per. řešení pro $\mu > 0$.
(b) $d = 1/2$, $\omega_0 = -1$, $a = -3/8$; tedy $r' = -r/8(3r^2 - 4\mu)$; stabilní počátek pro $\mu \leq 0$; nestabilní počátek a stabilní per. řešení pro $\mu > 0$.
(c) $d = 1/2$, $\omega_0 = -1$, $a = -1/8$; tedy $r' = -r/8(r^2 - 4\mu)$; stabilní počátek pro $\mu \leq 0$; nestabilní počátek a stabilní per. řešení pro $\mu > 0$.
(d) $d = 1/2$, $\omega_0 = -1$, $a = -1/2$; tedy $r' = -r/2(r^2 - \mu)$; stabilní počátek pro $\mu \leq 0$; nestabilní počátek a stabilní per. řešení pro $\mu > 0$.
(e) $d = 1/2$, $\omega_0 = -1$, $a = -3/8$; tedy $r' = -r/8(3r^2 - 4\mu)$; stabilní počátek pro $\mu \leq 0$; nestabilní počátek a stabilní per. řešení pro $\mu > 0$.
(f) $d = 1/2$, $\omega_0 = -1$, $a = 3/8$; tedy $r' = r/2(\mu + 3r^2/4)$; nestabilní počátek pro $\mu \geq 0$; stabilní počátek a nestabilní periodická řešení pro $\mu < 0$.
(g) $d = -1/2$, $\omega_0 = 1$, $a = -3/8$; tedy $r' = -r/8(4\mu + 3r^2)$; stabilní počátek pro $\mu \geq 0$; nestabilní počátek a stabilní periodická řešení pro $\mu < 0$.