Řešte úlohy na Hopfovu bifurkaci.

3. Ukažte, že systém

$$x' = f(x,y)\,, \qquad y' = g(x,y)$$

při polárních souřadnicích $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ přechází na

$$\begin{aligned} r' &= \cos\varphi\, f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + \sin\varphi\, g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \\ r\varphi' &= -\sin\varphi\, f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + \cos\varphi\, g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \end{aligned}$$

4. Ukažte pomocí polárních souřadnic, že pro μ blízká 0 se u systému

$$\begin{aligned} x' &= \mu x - y + f(x,y) \\ y' &= x + \mu y + g(x,y) \end{aligned}$$

objeví v okolí bodu $(0,0)$ netriviální periodická řešení. Nakreslete bifurkační diagram pro (r,μ). — Porovnejte s patřičnými větami o Hopfově bifurkaci.

(a)

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x\sqrt{x^2+y^2} \\ g(x,y) &= y\sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f(x,y) &= -y\sqrt{x^2+y^2} \\ g(x,y) &= x\sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} f(x,y) &= -x(x^2+y^2) \\ g(x,y) &= -y(x^2+y^2) \end{aligned}$$

5. Ukažte existenci Hopfovy bifurkace v bodě $(x,y,\mu) = (0,0,0)$ pro dané systémy. Vyšetřete stabilitu počátku a periodických řešení.

(a) $x' = -\mu x - y$, $y' = x + y^3$

(b) $x'' + (x')^3 - \mu x' + x = 0$

(c) $x' = \mu x + y + \mu x^2 - x^2 - xy^2$, $y' = -x + y^2$

(d) $x' = y - x^3$, $y' = -x + \mu y - x^2 y$

(e) $x' = \mu x + y - x^3\cos x$, $y' = -x + \mu y$

(f) $x' = y - 2x^2$, $y' = -x + \mu y - x^2(1+y)$

(g) $x' = -\mu x + y + x^2$, $y' = -x + x^2 - yx^2$