Bifurkace

Je dána rovnice
$$x' = f(x, \mu)\,, \tag{1}$$
kde $\mu \in \mathbb{R}$ je parametr, $x \in \mathbb{R}^n$ neznámá funkce. Předpokládáme, že pravá strana f je hladká.

Definice 1 (Neformální.)**.** Řekneme, že rovnice (1) má v bodě (x_0, μ_0) bifurkaci, jestliže chování řešení v okolí bodu x_0 se *podstatným způsobem* změní v okamžiku $\mu = \mu_0$.

Podstatnou změnou chování rozumíme typicky vznik/zánik stacionárního bodu či změnu jeho stability.

Základní 1d bifurkace.

V následujícím uvedeme základní typy jedno-dimenzionálních bifurkací, tedy případ $x \in \mathbb{R}$. Bifurkace znázorňujeme na tzv. bifurkačním diagramu: do roviny (μ, x) vykreslujeme stacionární body, neboli řešení rovnice $f(x, \mu) = 0$ (v grafu modrou barvou). Je zvykem stabilní ekvilibria značit plnou čarou, nestabilní přerušovanou čarou. Směr průběhu řešení při pevném μ – odpovídá znaménku $f(x, \mu)$ – je naznačen šipkami.

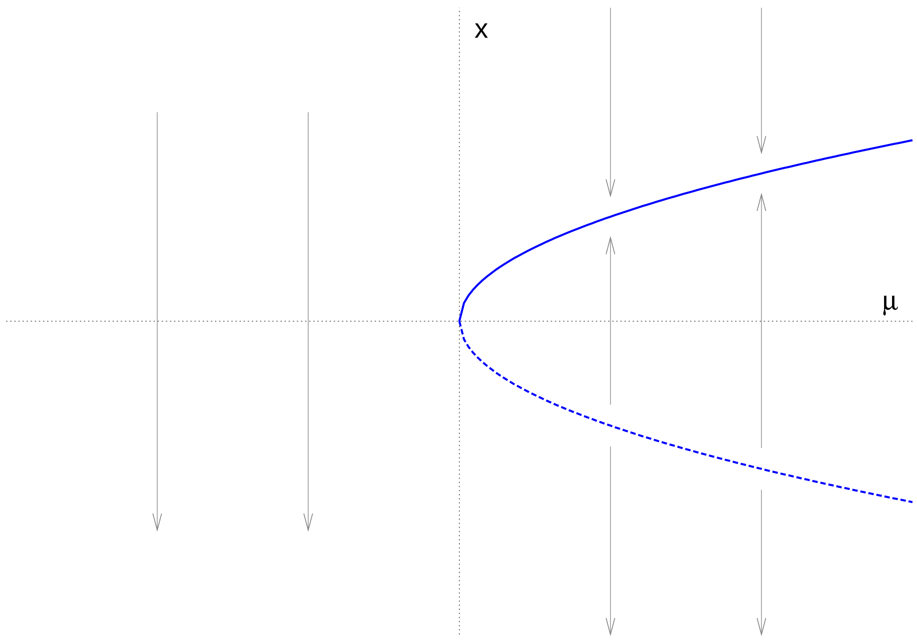
Příklad 1. Bifurkace „sedlo-uzel“ vzniká u rovnice $x' = \mu - x^2$. Pro $\mu < 0$ nejsou žádné stacionární body; pro $\mu = 0$ se v počátku objeví jeden stacionární bod, který se pro $\mu > 0$ rozpadne na dva: stabilní a nestabilní (Obrázek 1).

Poznámka. Termín „sedlo-uzel“ je v jednodimenzionálním případě poněkud matoucí; analogický případ v $\mathbb{R}^2$ odpovídá situaci, kdy vznikne nový stacionární bod, který se vzápětí rozpadne na (stabilní) uzel a (nestabilní) sedlo. Viz Příklad 5 níže.

Příklad 2. „Transkritická“ bifurkace se objeví u rovnice $x' = \mu x - x^2$. Pro $\mu < 0$ vidíme stabilní a nestabilní ekvilibrium, která se k sobě s rostoucím μ přibližují. V bodě $\mu = 0$ se jejich dráhy protnou a typ stability se vymění (Obrázek 2).

Příklad 3. „Vidličková“ bifurkace je kombinací předchozích. Příkladem je rovnice $x' = \mu x - x^3$. Pro $\mu < 0$ máme stabilní stacionární bod, z kterého se pro $\mu = 0$ oddělí dva nové, zatímco původní bod ztrácí stabilitu (Obrázek 3).

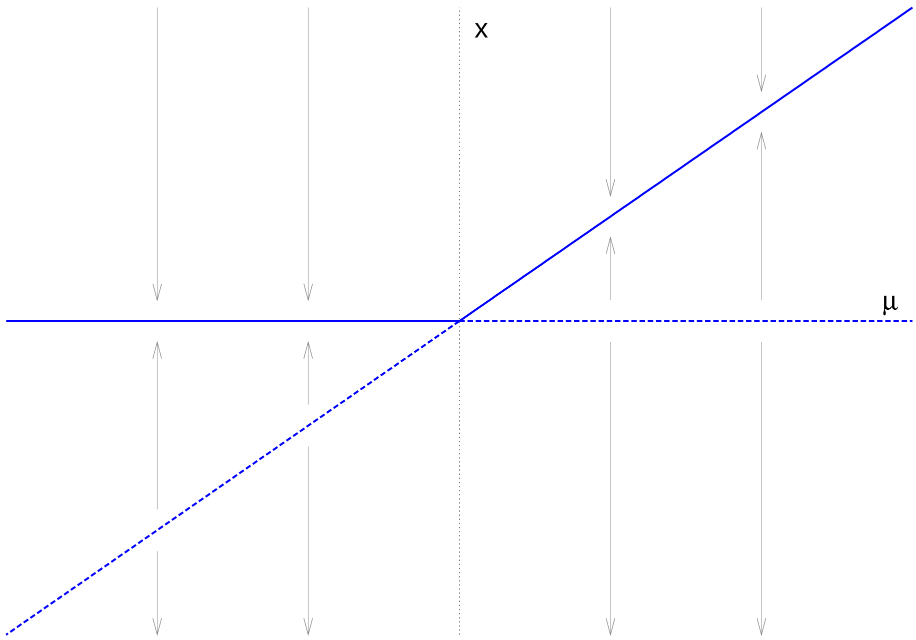
Poznámka. Ve všech uvedených případech jsou v bodě bifurkace, tedy pro $(x_0, \mu_0) = (0, 0)$, splněny rovnice
$$\begin{aligned} f(x, \mu) &= 0 \\ \partial_x f(x, \mu) &= 0 \end{aligned}$$



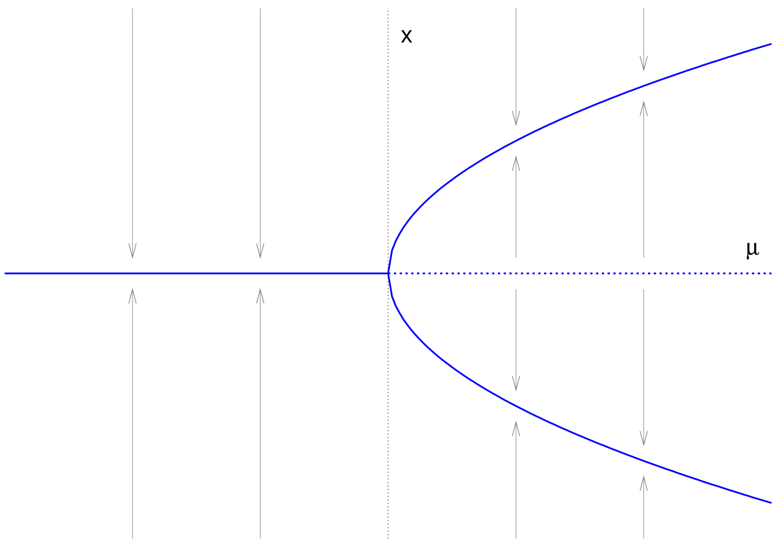
Obrázek 1: Bifurkace „sedlo-uzel“ 1d

Lze ukázat, že (pro jednodimenzionální rovnici) jsou to *nutné* podmínky bifurkace. Další podstatná vlastnost: v žádném okolí bodu bifurkace nelze množinu $\{f(x,\mu)=0\}$ vyjádřit jako graf funkce proměnné μ.

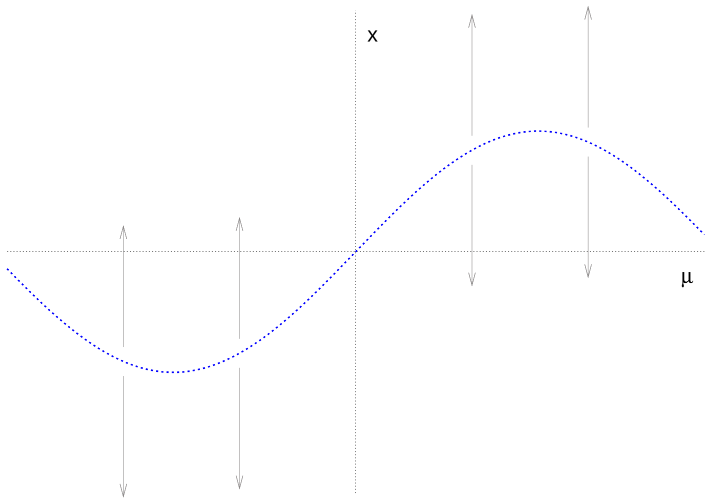
Příklad 4 (Ne-bifurkace.)**.** Rovnice $x' = x - \sin\mu$ má jediný stacionární bod $x = \sin\mu$. Při změně μ se tento bod posouvá, je nicméně stále nestabilní. Zde tedy nedochází k žádné bifurkaci (Obrázek 4).



Obrázek 2: „Transkritická“ bifurkace



Obrázek 3: „Vidličková“ bifurkace



Obrázek 4: Žádná bifurkace.