

Matematická analýza 2b – 1. série

1. Lineární rovnice vyšších řádů (Kalendovy). Najděte všechna řešení následujících rovnic:

- | | |
|--|---|
| (a) $y'' + 4y' + 4y = 0$, | (b) $y'' - 3y' + 2y = 0, y(0) = 4$ |
| (c) $y'' - 6y' + 13 = 0, y(0) = y(1) = 1$ | (d) $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$, |
| (e) $y'' - 2y' + 2y = \cos x, y(0) = y'(0) = 1$ | (f) $y''' - y'' - 2y' = e^{2x} + x^3 + 3x^2 + 1$, |
| (g) $y'' + 3y' + 2y = \sin x + \sin 2x$, | (h) $4y''' + y' = 3e^x + 2\sin \frac{x}{2}$, |
| (i) $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$, | (j) $y'' - y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, |
| (k) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + x + 1}, y(0) = y(1) = 0$ | (l) $y'' + y = \operatorname{tg} x$, |
| (m) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$, | |

2. Soustavy lineárních rovnic (Kalendovy). Najděte všechna řešení následujících soustav rovnic:

- | | |
|---|--|
| (a) $z' + y = 0, z' - y' = 3z + y$, | (b) $z' + z - y = e^x, y' - z + y = e^x$, |
| (c) $5z' - 2y' + 4z - y = e^{-x}, z' + 8z - 3y = 5e^{-x}$, | |
| (d) $z' + 3z + y = 0, y' - z + y = 0$, | (e) $z' = y - 7z, y' + 2z + 5y = 0$, |
| (f) $z' = 2y - 5z + e^x, y' = z - 6y + e^{-2x}$, | (g) $z'' + y' + z = e^x, z' + y'' = 1$, |
| (h) $u' = w + v - u, v' = w + u - v, w' = u + v + w, u(0) = 1, v(0) = w(0) = 0$, | |
| (i) $u' = w + v, v' = w + u, w' = u + v, u(0) = -1, v(0) = 1, w(0) = 0$. | |

3. Lineární nezávislost. Rozhodněte, zda jsou následující trojice funkcí lineárně nezávislé:

- | | |
|---------------------------------|--|
| (a) $\sin x, \cos x, \sin 2x$, | (b) $x^2 + x + 1, x^2 - 2x + 2, x + 1$, |
|---------------------------------|--|

4. Exponenciála matice. Vypočtěte $\exp A$ pro

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (c) A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -7 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

5. Domácí úkol. (do 5.3.2008, 1/2 bodu) Nechť x, y, z jsou řešení systému

$$\begin{aligned} x' &= -x + y + z - 2 \cos t \\ y' &= z \\ z' &= -y \end{aligned}$$

s počáteční podmínkou $x(0) = a, y(0) = b, z(0) = c$. Najděte všechny trojice $(a, b, c) \in \mathbb{R}$, pro které existuje limita $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$.

12. a 19.3.2007

Matematická analýza 2b – 2. série

1. Najděte Fourierovy řady následujících funkcí:

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~barta/vyuka.html>

- (a) x na $(-\pi, \pi)$, (b) x^2 na $(-\pi, \pi)$, (c) x^2 na $(0, 2\pi)$, (d) $\sin ax$ na $(-\pi, \pi)$,
 (e) $\cos^3 x$ na $(-\pi, \pi)$, (f) $\frac{\sin mx}{\sin x}$ na $(-\pi, \pi)$, (g) $\frac{1}{\sin x}$ na $(-\pi, \pi)$, (h) $\operatorname{sgn}(x-1)$ na $(-\pi, \pi)$,
 (i) $\sin^4 x$ na $(0, \pi)$, (j) $\frac{\pi-x}{2}$ na $(0, 2\pi)$, (k) $x \sin x$ na $(-\pi, \pi)$, (l) $\ln |\sin \frac{x}{2}|$ na $(0, \frac{\pi}{2})$,
 (m) $|\cos x|$ na $(0, \pi)$, (n) x na $(a, a+l)$, (o) $x - [x]$ na $(0, 1)$, (p) $\operatorname{sgn}(x-1)$ na $(-\pi, \pi)$,
 (q) $\max\{0, x\}$ na $(-\pi, \pi)$, (r) $\max\{0, \sin x\}$ na $(-\pi, \pi)$,
 (s) $x(\pi - |x|)$ na $(-\pi, \pi)$, (t) $\arcsin(\sin x)$ na $(-\pi, \pi)$,
 (u) $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$, $f(x) = 1$, $x \in (1, 2)$ a $f(x) = 3 - x$, $x \in [2, 3]$ na intervalu $(0, 3)$

2. Které koeficienty Fourierovy řady funkce na $(-\pi, \pi)$ se anulují, jestliže platí

- (a) $f(x) = -f(x + \pi)$ (b) $f(x) = f(-x)$ a $f(x + \pi) = -f(x)$
 (c) $f(x) = -f(-x)$ a $f(x + \pi) = -f(x)$

3. Rozvedte následující funkce v sinové a cosinové řady na intervalu $(0, \pi)$:

- (a) $\sin x$, (b) x^2 , (c) x^3 , (d) e^{ax}

4. Sečtěte následující řady na uvedených intervalech:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$, $(0, 2\pi)$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, $[0, 2\pi]$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$, $[0, 2\pi]$,
 (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$, $[-\pi, \pi]$, (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n^3}$, $[-\pi, \pi]$, (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$, $[-\pi, \pi]$,
 (g) $\sum_{m,n=1}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{\sin mx \cdot \sin ny}{mn}$, $(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$, (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n(n+1)}$, $(-\pi, \pi)$,
 (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2}$, (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nx}{n^2}$

Návod k (i), (j): rozviňte charakteristickou funkci intervalu $(0, y)$ v sinovou a cosinovou řadu na intervalu $(0, \pi)$.

5. Sečtěte následující řady:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$, (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{36n^2-1}$.

6. Dokažte, že pro $|x| < 1$ platí $\sin \pi x = \pi x \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{x^2}{n^2})$. (Rozviňte ve Fourierovu řadu funkci $\cos \alpha x$ na $(-\pi, \pi)$, aplikujte pro $x = \pi$, vyjádřete $\cotg \alpha x - \frac{1}{\alpha x}$ a výslednou rovnost integrujte.)

26. 3.2007

Matematická analýza 2b – 3. série

1. Spočtěte

- (a) $\min\{\int_{-1}^1 |x^3 - a - bx - cx^2|^2 dx : a, b, c \in \mathbb{R}\}$,
 (b) $\min\{\int_{-\pi}^{\pi} |x^2 - a \cos x - b \cos 2x|^2 dx : a, b \in \mathbb{R}\}$,

2. Nechť f je spojitá 1-periodická funkce a α iracionální číslo. Dokažte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\alpha k) = \int_0^1 f(t) dt.$$

3. Uvažujme strunu jednotkové délky s upevněnými konci. Výchylka y kmitající struny v čase t v bodě x je dána obecným přepisem:

$$y(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \sin n\pi x (C_n \cos n\pi ct + D_n \sin n\pi ct),$$

kde c je konstanta.

(a) Najděte předpis pro výchylku y , jestliže v čase $t = 0$ byl střed struny vychýlen do vzdálenosti h a struna měla tvar sestávající ze dvou úseček (její rychlost v čase $t = 0$ byla nulová).

(b) Najděte předpis pro výchylku y , jestliže v čase $t = 0$ zaujímal struna tvar $y(0, x) = kx(1 - x)$ a její rychlost byla nulová (k je konstanta).

4. Potenciální energie struny při výchylce y je rovna $\int_0^1 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx$. Přepokládejme, že konstanty h a k z předchozí úlohy jsou takové, že struny měly v čase $t = 0$ stejnou energii. V kterém případě bude znít základní tón silněji? Určete amplitudu základního tónu.

5. **Domácí úkol.** (do 26.3., 1 bod)

Metrový měděný drát má v čase $t = 0$ ve vzdálenosti x metrů od levého konce teplotu $100 \sin^3(\pi x)$ stupňů Celsia. Konce drátu jsou v ledu a mají tak stálou teplotu $0^\circ C$. Výměnu tepla povrchem drátu zanedbejte. Jakou teplotu bude mít nejteplejší část drátu po deseti sekundách? (Návod: http://en.wikipedia.org/wiki/Heat_equation)

9. 4. 2007

Matematická analýza 2b – 4. série

1. Vypočtete délky následujících křivek:

- (a) $(x, \sqrt{1-x^2})$, $x \in (-1, 1)$, (b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,
 (c) $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^2$, $t \in [0, 1]$, (d) $\sqrt{x^2 + y^2} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,
 (e) v polárních souřadnicích $r = a \sin^2(\phi/3)$, $\phi \in [0, 3\pi]$; $a > 0$,

2. Vypočtete následující křivkové integrály:

- (a) $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$, kde C je kružnice $(x - 1/2)^2 + y^2 = 1/4$,
 (b) $\int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds$, kde $C = \{[a \cos t, a \sin t, bt], t \in [0, 4\pi]\}$,
 (c) $\int_C |y| ds$, kde C je dána rovnicí $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$,
 (d) $\int_C \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \right) ds$, kde $C = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{4}{3}}\}$
 (e) $\int_C x + y ds$ po obvodu trojúhelníka s vrcholy $[0, 0]$, $[1, 0]$, $[0, 1]$,
 (f) $\int_C xy ds$ pro $C = \{(a \cosh t, a \sinh t), t \in [0, t_0]\}$, $a > 0$.

3. Vypočtete těžiště následujících křivek:

- (a) oblouku homogenní cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, \pi]$; $a > 0$,
 (b) sférického trojúhelníku o vrcholech $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$ na jednotkové kouli,
 (c) $(e^t \sin t, e^t \cos t, e^t)$, $t \in (-\infty, 0)$,
 (d) $y = \cosh \frac{x}{a}$, $x \in [1, b]$.

4. Vypočtete křivkové integrály druhého druhu:

- (a) $\int_C (x + y) dx + (x - y) dy$, $C = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$, kladně orientovaná,
- (b) $\int_C (2a - y) dx + x dy$, $C = \{[x, y]; x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in [0, 2\pi]\}$; $a > 0$,
- (c) $\int_C (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$, C je část paraboly $y = x^2$ mezi body $[-1, 1]$ a $[1, 1]$,
- (d) $\int_C \frac{(x+y) dx - (x-y) dy}{x^2 + y^2}$, C je kladně orientovaná kružnice o poloměru a se středem v počátku.
- (e) $\int_C yz dx + xz dy + xy dz$, $C = \{(a \cos t, a \sin t, \frac{b}{2\pi} t), t \in [0, 2\pi]\}$; $a > 0$,

5. Vypočtete:

- (a) práci silového pole $F(x, y, z) = (x, y, xz - y)$ po křivce $\phi(t) = (t^2, 2t, 4t^3)$, $t \in [0, 1]$.
- (b) množství kapaliny, které proteče za jednotku času elipsou $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, proudí-li kapalina rychlostí $V(x, y) = (x, 2y)$.

23. 4. 2007

Matematická analýza 2b – 5. série

1. Parametrizujte následující plochy:

- (a) povrch kváдру $\{(x_1, x_2, x_3) : |x_i| \leq a_i\}$,
- (b) zobecněnou sféru $x^a + y^a + z^a = 1$,
- (c) hyperboloid $x^2 + y^2 - z^2 = 1$,
- (d) plochu, která vznikne rotací funkce $\sin x$, $x \in [0, \pi]$ okolo osy x
- (e) plochu, která vznikne pohybem jednotkové kružnice tak, že střed se pohybuje po hyperbole $xy = a$, $z = 0$ a kružnice je kolmá na tuto hyperbolu
- (f) povrch válce $\{(x, y, z) : 0 \leq z \leq v \text{ \& } x^2 + y^2 \leq r^2\}$

2. Vypočtete obsahy následujících ploch:

- (a) $z^2 = 2xy$ uříznuté rovinami $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$,
- (b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ omezené vnitřkem válce $x^2 + y^2 = 2x$,
- (c) $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$, $z = h\phi$, $\rho \in (0, a)$, $\phi \in [0, 2\pi]$
- (d) sféry $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
- (e) $M = \{(x, y, z) : z = xy, x^2 + y^2 \leq 1\}$,
- (f) $M = \{(x, y, z) : z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), x^2 + y^2 \leq 1\}$.

3. Vypočtete následující plošné integrály 1. druhu:

- (a) $\int_S x^2 + y^2 dS$, kde S je část plochy $x^2 + z^2 = 2az$ ležící v kuželi $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$,
- (b) $\int_S \frac{1}{h} dS$, kde S je povrch elipsoidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
a $h(x, y, z)$ je vzdálenost středu elipsoidu od roviny tečné k S v bodě (x, y, z) ,
- (c) $\int_S z dS$, kde S je plocha z úlohy 2c.

4. Vypočtete:

- (a) těžiště plochy $M = \{x^2 + y^2 = 2z, 0 \leq z \leq 2\}$,
- (b) těžiště plochy $M = \{z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq ax\}$, $a > 0$

5. Vypočtete plošné integrály druhého druhu:

- (a) $\int_S (z - y) dy dz + (z - x) dz dx + (x - y) dx dy$, S je "vnější strana" plochy $z^2 = x^2 + y^2$, $0 < z < h$, $h > 0$,

- (b) $\int_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, S je "vnější strana" sféry $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$,
 (c) $\int_S z dx dy$, S je kladně orientovaná sféra $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,
 (d) $\int_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$, S je kladně orientovaná sféra $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$,
 (e) $\int_S \frac{1}{x} dy dz + \frac{1}{y} dz dx + \frac{1}{z} dx dy$, S je vnější povrch elipsoidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

6. (Domácí úkol, 1/2 bodu) Jakou práci musíme vykonat, chceme-li přemístit kartáček na zuby jednotkové hmotnosti z povrchu raketoplánu o hmotnosti $m \gg 1$ na povrch vesmírné stanice o hmotnosti $M \gg 1$? Raketoplán a vesmírnou stanici považujte za koule o poloměrech ρ_1, ρ_2 , jejichž hmota je soustředěna ve středu koule, kartáček považujte za hmotný bod. Vzdálenost středů raketoplánu a vesmírné stanice je d . Dva hmotné body o hmotnostech M_1, M_2 vzdálené r se přitahují gravitační silou o velikosti $\kappa \frac{M_1 M_2}{r^2}$. Po jaké dráze bude energeticky nejvýhodnější kartáček přestěhovat?

21. 5. 2008

Matematická analýza 2b – 6. série

1. Potenciál. Vypočtěte následující křivkové integrály:

- (a) $\int_\phi x dy + y dx$, $\phi(t) = (t^2 + 2, t - 1)$, $t \in [-1, 3]$,
 (b) $\int_c e^x (\cos y dx + \sin y dy)$, c je kladně orientovaná kružnice,
 (c) $\int_c e^{-x} e^{-y} dx + e^{-y} e^{-x} dy$, c je část hyperboly $x^2 - y^2 = 1$, $x, y > 0$ orientovaná tak, že x roste.

2. Greenova věta. Vypočtěte následující křivkové integrály:

- (a) $\int_c (x + y) dx - (x - y) dy$, c je kladně orientovaná elipsa $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$,
 (b) $\int_c (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy$, c je horní půlkružnice $x^2 + y^2 = ax$ probíhaná od $(a, 0)$ do $(0, 0)$,
 (c) $\int_c x \sin y dx + y \sin x dy$, c je obvod čtverce $[0, \pi] \times [0, \pi]$ orientovaný po směru hodinových ručiček.

3. Stokesova věta. Vypočtěte následující křivkové integrály:

- (a) $\int_c y dx + z dy + x dz$, kde c je průnik sféry $x^2 + y^2 + z^2 = a$ s rovinou $x + y + z = 0$ kladně orientovaný vzhledem k vektoru $(1, 1, 1)$,
 (b) $\int_c (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$, kde c je průnik čtverce $[0, a]^3$ s rovinou $x + y + z = 3a/2$ kladně orientovaný vzhledem k vektoru $(1, 1, 1)$

4. Gaussova – Ostrogradského věta. Vypočtěte:

- (a) $\int_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$, S vnější strana sféry $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$,
 (b) objem tělesa ohraničeného plochou $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = -u + a \cos v$, $u \geq 0$ a rovinami $x = 0$, $z = 0$,
 (c) objem anuloidu.
 (d) $\int_S xyz dy dz$, $\int_S xy dx dz$, S je povrch krychle $[0, a]^3$ orientovaný vnější normálou.

1. písemka

1. (1/2 bodu) Najděte sinovou řadu, která konverguje stejnoměrně na intervalu $[0, 3]$ k funkci $f(x) = \min\{x, x^2, 2\}$.
2. (1/2 bodu) Necht $x, y : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jsou omezená řešení soustavy

$$\begin{aligned}x'(t) &= x(t) + 4y(t) \\ y'(t) &= x(t) - 2y(t) + 3\end{aligned}$$

s počáteční podmínkou $x(1) = 1, y(1) = a, a \in \mathbb{R}$. Určete a a vypočtete $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t))$, pokud tato limita existuje.

2. písemka

1. (1/2 bodu) Vypočtete plošný integrál prvního druhu

$$\int_S x^2 \, dS,$$

kde S je povrch tělesa, které vznikne průnikem válce $x^2 + y^2 \leq 1$ a koule $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$.

2. (1/2 bodu) Jakou práci vykoná vektorové pole

$$F(x, y) = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

na bod pohybující se po hyperbole $x^2 - y^2 = 3$ z bodu $[2, 1]$ do bodu $[2, -1]$?

Výsledky 1. série

1. (a) $y = ce^{-2x} + dxe^{-2x}$, (b) $y = ce^x + (4-c)e^{2x}$, (c) $y = 1$, (d) $y = \frac{1}{5}e^{4x} + c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$, (e) $y = -\frac{1}{5}\sin x \cos^2 x + \frac{2}{5}\cos x - \frac{2}{5}\cos^3 x - \frac{2}{5}\sin x + \frac{1}{10}\cos x \sin(2x) + \frac{1}{5}\cos x \cos(2x) + \frac{3}{5}e^x \sin x + \frac{4}{5}e^x \cos x$, (f) $y = -\frac{1}{144}(20e^{2x} - 24xe^{2x} + 18x^4 + 36x^3 + 54x^2 + 126x - 9) + C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{-x}$, (g) $y = -\frac{1}{20}\sin 2x - \frac{3}{20}\cos 2x - \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x + c_1e^{-2x} + c_2e^{-x}$, (h) $y = \frac{3}{5}e^x - 4\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \sin x + \cos \frac{x}{2} \cos x + C_1 + C_2 \sin \frac{x}{2} + C_3 \cos \frac{x}{2}$, (i) $y = -\arcsin(e^x)e^x - \operatorname{arctgh}(\sqrt{1-e^{2x}})e^{2x} + C_1e^x + C_2e^{2x}$, $x \in (-\infty, 0)$, (j) $y = -\ln(1 + e^{2x}) + x + 2\operatorname{arctg}(e^x)e^x + 1 + C_1 + C_2e^x$, (k) $y = -\frac{1}{2}e^x \ln(x^2 + x + 1) + \frac{\sqrt{3}}{3}e^x \operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x + 1)) + \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x + 1))xe^x - \frac{\sqrt{3}\pi}{18}e^x + \left(\frac{1}{2}\ln 3 - \frac{5\sqrt{3}\pi}{18}\right)xe^x$, (l) $y = -\cos x \cdot \ln \frac{1+\sin x}{\cos x} +$

$C_1 \cos x + C_2 \sin x$, $x \in (\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi)$, (m) $y = \sqrt{4-x^2}e^x + \arcsin(\frac{1}{2}x)xe^x + C_1e^x + C_2xe^x$, $x \in (-2, 2)$.

2. (a) $z = \frac{3B-A}{4}e^x + \frac{A+B}{4}e^{-3x}$, $y = \frac{A-3B}{4}e^x + \frac{3A+3B}{4}e^{-3x}$, (b) $z = e^x + de^{-4x} + c$, $y = e^x - de^{-4x} + c$, (c) $z = -2e^{-x} + ce^x + de^{-2x}$, $y = 3e^{-x} + 3ce^x + 2de^{-2x}$, (c) $z = -(c+d)xe^{-x} + de^{-2x}$, $y = (c+d)e^{-x} + ce^{-2x}$, (d) $z = (c-d)e^{-6x} \sin x + de^{-6x} \cos x$, $y = ce^{-6x} \cos x + (c-2d)e^{-6x} \sin x$, (e) $z = \frac{7}{40}e^x + \frac{1}{5}e^{-2x} + \frac{2}{3}(c+d)e^{-4x} - \frac{1}{3}(2c-d)e^{-7x}$, $y = \frac{1}{40}e^x + \frac{3}{10}e^{-2x} + \frac{1}{3}(c+d)e^{-4x} + \frac{1}{3}(2c-d)e^{-7x}$, (f) $z = e^x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{b+c}{2}x^2 + c + dx$, $y = -e^x + \frac{1}{24}x^4 + a + bx + \frac{b+c}{6}x^3 + \frac{d}{2}x^2$, (g) $u = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}$, $v = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$, $w = -\frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$, (h) $u = -e^{-x}$, $v = e^{-x}$, $w = 0$.

3. (a) ano, (b) ano.

4. (a) $\begin{pmatrix} e & e \\ e & 0 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^4 - \frac{1}{3}e^{-2} & e^4 - e^2 & -e^4 + e^2 \\ -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}e^2 & \frac{11}{6}e^4 - \frac{1}{3}e^{-2} - \frac{3}{2}e^2 & -\frac{3}{2}e^4 + e^{-2} + \frac{1}{2}e^2 \\ -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}e^2 & \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}e^2 & -\frac{1}{6}e^4 + \frac{2}{3}e^{-2} - \frac{1}{2}e^2 \end{pmatrix}$,

Výsledky 2. série

1. (a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i) $\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$, (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, (k) $1 - \frac{1}{2} \cos x +$

$2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1} \cos nx$, (l) $\ln \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$, (m) $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^2}{4n^2-1} \cos 2nx$, (n) $a + \frac{l}{2} + \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\sin \frac{2\pi na}{l} \cos \frac{2\pi n}{l}$

$\cos \frac{2\pi na}{l} \sin \frac{2\pi nx}{l})$, (o) $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin 2\pi nx}{n}$, (p) $-\frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\cos n - (-1)^n)}{n\pi} \cos nx - \frac{2 \sin n}{n\pi} \sin nx$,

(q) $-\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx - \frac{2}{\pi(2n-1)^2} \cos(2n-1)x$, (r) $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$, (s)

$\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$, (t) $\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin(2n+1)x$, (u) $\frac{2}{3} - \frac{9}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{2\pi nx}{3} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos 2\pi nx$.

2. (a) a_{2k} , b_{2k} , (b) a_{2k} , b_k , (c) a_k , b_{2k} .

3. (a) $\sin x$, $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$, (b) $2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}$, $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$

(c) viz. Kopáček IV, (d) Kopáček IV.

4. Kopáček IV

5. Kopáček IV

Výsledky 3. série

Výsledky 4. série

Kopáček III a Pickova sbírka na <http://www.karlin.mff.cuni.cz/pick/sbirka.pdf>

Výsledky 5. série

Kopáček III a Pickova sbírka na <http://www.karlin.mff.cuni.cz/pick/sbirka.pdf>

Výsledky 6. série

Kopáček III