3. 10. 2007

Matematická analýza 2a – 1. série

1. Bodová a stejnoměrná konvergence posloupností. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci:

(a) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ na $(0,1)$,
(b) $f_n(x) = x^{2n} - x^{3n}$ na $(0,1)$,
(c) $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$ na $(0,\infty)$,
(d) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}$ na $(0,1)$,
(e) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ na $\mathbb{R}$,
(f) $f_n(x) = n(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x})$ na $(0,\infty)$,
(g) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ na $\mathbb{R}$,
(h) $f_n(x) = \sin(\frac{x}{n})$ na $\mathbb{R}$,
(i) $f_n(x) = x \operatorname{arctg}(nx)$ na $\mathbb{R}$,
(j) $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$ na $\mathbb{R}$,
(k) $f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}$ na $(0,+\infty)$,
(l) $f_n(x) = e^{n(x-1)}$ na $(-\infty, 1/2)$,
(m) $f_n(x) = \frac{1+x^n}{1+x^{n-1}}$ na $[0,+\infty)$,
(n) $f_n(x) = \frac{\ln nx}{nx}$ na $(0,+\infty)$
(o) $f_n(x) = x^n$ na $|x| \le 1, x \in \mathbb{C}$,
(p) $f_n(x) = n(x^{1/n} - 1)$ na $[1,+\infty)$
(q) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ na $|x| \le \varepsilon$, $x \in \mathbb{C}$, resp. $|x| \ge \varepsilon$, $x \in \mathbb{C}$.

2. Bodová a stejnoměrná konvergence řad. Vyšetřete, pro která x jsou následující řady konvergentní a na jakých intervalech jsou stejnoměrně, resp. lokálně stejnoměrně konvergentní (absolutně, neabsolutně):

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$,
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$,
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$,
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx^n}$,
(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{((n-1)x+1)(nx+1)}$,
(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$,
(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$,
(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n})$,
(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^3}$,
(j) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$,
(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$,
(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$,
(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}$,
(n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \operatorname{arctg} nx$,
(o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} e^{-x^2/n}$,
(p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} e^{-x^2/n}$,
(q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{\sqrt{n(n+x)}}$,
(r) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin^2 n}{n^2+x^2}$.

3. Teoretické úlohy. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ pro $x = x_0$, pak konverguje na intervalu $[x_0, \infty)$ stejnoměrně.

(b) Konverguje-li $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ stejnoměrně na intervalu (x_0, ∞), pak konverguje také pro $x = x_0$.

(c) Nechť f_n, $f : I \to J$ a $f_n \to f$ stejnoměrně na I. Pokud $g : J \to \mathbb{R}$ je spojitá (stejnoměrně spojitá) na J, pak $g \circ f_n \to g \circ f$ stejnoměrně na I.

6. Pojem konvergence obecně. Nechť X, Y a Z jsou libovolné množiny a $f : X \times Y \to Z$. Co potřebujeme od množin X, Y a Z, abychom mohli mluvit
(a) o bodové konvergenci $\lim_{y \to y_0} f(x,y)$?
(b) o stejnoměrné konvergenci $\lim_{y \to y_0} f(x,y)$ vzhledem k $x \in X_1 \subset X$?
(c) o lokálně stejnoměrné konvergenci $\lim_{y \to y_0} f(x,y)$ vzhledem k $x \in X_1 \subset X$?
Napište definice pojmů uvedených v (a), (b) a (c).

17. 10. 2007

Matematická analýza 2a – 2. série

1.* Stejnoměrná konvergence posloupností. Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci:

(a) $f_n(x) = n^3(\sin\frac{x}{n} - x\sin\frac{1}{n})$ (b) $f_n(x) = \frac{\ln(1+\frac{x}{n})-\frac{x}{n}}{\cos\frac{1}{n+x}-1}$

(c) $\lim_{y\to 0}\frac{x\sin y+\sin xy-2xy}{xy^3}$ (d) $\lim_{y\to 1}\frac{\sqrt{x^2+xy+y^2}-\sqrt{x^2+x+1/y}}{x(y-1)}$

2.* Stejnoměrná konvergence řad.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x(x+n)}{n}\right)^n$, (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$, (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sin^n x}{n^2}$,

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\pi x^n$, (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\sqrt[n]{x}$, (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{4x}{x^2+4}\right)^n$.

3. Stejnoměrná konvergence řad závislých na parametru. Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^p x^q}{x^2+n^3}$, $p, q > 0$, (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n y^n}{x^n+y^n}$, $y\in\mathbb{R}$,

4. Derivování řad. Najděte množinu bodů, ve kterých mají následující funkce derivaci:

(a) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}$ (b) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{n^2+x^2}$

5. Spojitost a derivování řad. Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení:

(a) Funkce $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ má spojitou derivaci na $\mathbb{R}$ a spojitou f'' na $(0, 2\pi)$.

(b) Funkce $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ je $\mathcal{C}^\infty$ na $(1,\infty)$.

(c) Nechť $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^p+x^2n^q}$, kde $p, q \geq 0$. Pak f je spojitá na $(0,\infty)$, pokud $\max(p,q) > 1$ a f je spojitá na $\mathbb{R}$, pokud $p+q > 2$.

6. Zajímavé protipříklady. Dokažte.

(a) Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ konverguje na $[0,1]$ absolutně i stejnoměrně, ale nekonverguje absolutně stejnoměrně.

(b) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, kde $f_n(x) = \sin x$ na $(2n\pi, 2(n+1)\pi)$ a $f_n(x) = 0$ jinak, nekonverguje stejnoměrně na $(0,\infty)$, přesto její součet je tam spojitá nekonečně diferencovatelná funkce. (Najděte řadu, která nekonverguje ani lokálně stejnoměrně, jen bodově, a přesto je součet nekonečně diferencovatelná funkce.)

(c) Stejnoměrně konvergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ nezáporných funkcí, kde $f_n(x) = 0$ na $[0, 2^{-n-1}]\cup[2^{-n}, 1]$ a $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin^2(2^{n+1}\pi x)$ na $[2^{-n-1}, 2^{-n}]$, nelze majorizovat absolutně konvergentní číselnou řadou.

31. 10. 2007

Matematická analýza 2a – 3. série

1. Mocninné řady. Vyšetřete konvergenci (absolutní a neabsolutní, bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou) následujících řad v komplexním oboru:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} x^n$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} x^n$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$ (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}} x^n}{\sqrt{n^2+1}}$ (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{n^2} x^n$

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}}(x-1)^n$ (h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right) x^n$ (i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n!}$

(j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} (x+2)^2 n$ (k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p x^n$ (l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^n$

2. Mocninné řady. Sečtěte následující řady:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!}$ (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3 x^n}{(n+1)!}$

3. Sčítání řad. Sečtěte následující řady:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)!}$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n-1)}$ (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

4. Teoretické úlohy.

(a) Vyšetřete průběh funkce $\zeta(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

21. 11. 2007

Matematická analýza 2a – 4. série

1. Úplnost. Rozhodněte, zda jsou následující metrické prostory úplné:

(a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ nebo } \operatorname{Re} z > 1\}$ s eukleidovskou metrikou

(b) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : xy < 1\}$ s eukleidovskou metrikou

(c) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^3 \le 1 \ \& \ x + y < \frac{1}{2}\}$ s eukleidovskou metrikou

(d) $\{f \in C([0,1]) : \|f-3\|_\infty < 1 \text{ nebo } \|f - \sin\|_\infty < 1\}$ se supremovou metrikou

(e) $\{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ spojitá}\}$, $\|f\| := \int_0^1 |f(x)| \,\mathrm{d}x$

(f) $\{(a_n)_{n=1}^\infty : \lim a_n \text{ existuje}\}$, $\|(a_n)_{n=1}^\infty\| := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$

(g) $\{(a_n)_{n=1}^\infty : \lim a_n \text{ existuje}\}$, $\rho(a,b) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n}|a_n - b_n|$

(h) $\{[x_1,x_2] \in \mathbb{R}^2 : 1 < x_1 + x_2 < 2\}$, $\rho(x,y) := |x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2|$ pokud $x \neq y$.

(i) $\mathbb{R} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{N}$ se součtovou metrikou.

2. Úplnost. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

(a) Jsou-li (M_1, ρ_1), (M_2, ρ_2) úplné, pak $(M_1 \times M_2, \rho_1 \times \rho_2)$, kde $\rho_1 \times \rho_2((x_1,x_2),(y_1,y_2)) := \rho_1(x_1,y_1) + \rho_2(x_2,y_2)$, je také úplný.

(b) Spojitým obrazem úplného prostoru je zase úplný prostor.

(c) Je-li zobrazení spojité a na, pak je obrazem úplného metrického prostoru opět úplný prostor.

(d) Je-li f homeomorfismus mezi dvěma metrickými prostory, pak jsou buď oba úplné nebo oba neúplné.

3. Souvislost. Rozhodněte, zda jsou množiny z bodu 1 souvislé, případně obloukově souvislé:

4. Souvislost. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení (případně o platnosti jednotlivých implikací):
(a) Je-li $A \subset \mathbb{R}^n$ konvexní, pak je souvislá (obloukově souvislá).
(b) Jsou-li A, $B \subset \mathbb{R}^n$ konvexní, pak je $A \cap B$ souvislá.
(c) Množina A je souvislá, právě když je její hranice souvislá.
(d) Je-li $f : (M, \rho) \to (N, \sigma)$ spojité, pak $A \subset M$ je souvislá, právě když $f(A)$ je souvislá.

5. Kompaktnost. Rozhodněte, zda jsou množiny z bodu 1 a následující množiny kompaktní.
(j)* $\{(x_1, x_2, \dots) \in l^2 : |x_n| \leq \frac{1}{n}\}$, $\|(x_1, x_2, \dots)\|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$.
(k) $\{f \in C([0,1]) : \|f\| \leq 1 \ \& \ f \text{ neklesající})\}$, $\|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

6. Husté a řídké množiny. Dokažte následující tvrzení:
(a) Prostor omezených funkcí na $[0,1]$ se supremovou metrikou není separabilní.
(b) Konečné sjednocení řídkých množin je opět řídká množina.
(c) Prostor $l^2 := \{(x_1, x_2, \dots) : \|(x_1, x_2, \dots)\|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty\}$ je separabilní.
(d) Součin dvou separabilních metrických prostorů je opět separabilní.
(e)* Kompaktní podmnožiny $C([0,1])$ jsou řídké.

5. 12. 2007

Matematická analýza 2a – 5. série

1. Jednoduché DR. Najděte řešení diferenciálních rovnic splňující dané podmínky:
(a) $y' = x^2 + x + 1$, $y(0) = 2$ (b) $e^x y' = x$, $y(1) = 2$
(c) $y'' = \frac{1}{x}$, $y(1) = 0$, $y(3) = 2$ (d) $y' = y$, $y(0) = a$

2. Separace proměnných. Najděte všechna řešení diferenciálních rovnic:
(a) $x^2 y' = y \operatorname{arctg} x$ (b) $y' = e^x y$ (c) $xyy' = y^2 + 1$
(d) $xy' = y \ln y$ (e) $y = \operatorname{tg}(1/y')$ (f) $\sqrt{y'} = xy^2$
(g) $y' = 1 + y^2$ (h) $y' = \sqrt[3]{(y-1)^2}$ (i) $y' = x(1 + y^2)$

3. Lineární rovnice prvního řádu. Najděte všechna řešení diferenciálních rovnic:
(a) $2y' + y = x^3$ (b) $y' + 2y = e^x$ (c) $y' + y = \frac{1}{1+e^{2x}}$
(d) $-3y' + 2y = \sin 2x$ (e) $y' + 2xy = x + 3x^3$ (f) $y' + x^3 \sin x \cdot y = x + 2$
(g) $y' + \ln x \cdot y = 2x$ (h) $y' - 3x^2 y = \sin x$ (i) $y' + \frac{y}{x} = x^2$

4. Lineární rovnice vyšších řádů. Najděte všechna řešení diferenciálních rovnic:
(a) $y'' + 3y' + 2 = 2x^2$ (b) $y'' - 4y = e^x$ (c) $y''' + y' = xe^x + 1$
(d) $y''' - y'' + y' - y = \sin x$ (e) $y'' - 5y' + 6 = 3x^3$ (f) $y''' + y = x + 2$

5. Rovnice, které lze převést na předchozí typy. Najděte všechna řešení diferenciálních rovnic:
(a) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ (b) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ (c) $y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$
(d) $(x + y - 2)\ \mathrm{d}y = (y - x - 4)\ \mathrm{d}x$ (e) $y' = \frac{1}{x+2y}$
(f) $(x + y + 1)\ \mathrm{d}y = (2x + 2y - 1)\ \mathrm{d}x$ (g) $y' = \frac{x^2}{y^2} - 2$

6. Další diferenciální rovnice. Najděte všechna řešení diferenciálních rovnic:

(a) $(y')^3 - 2x(y')^2 + y' = 2x$ (b) $(y')^2 - 1 = 0$
(c) $(y')^2 + yy' + y^2 - 1 = 0$

19. 12. 2007

Matematická analýza 2a – 6. série

1. Metoda integračního faktoru. Najděte všechna řešení diferenciálních rovnic:
(a) $y' + x^2y = 1$, (b) $y' + x^2y = x^2$, (c) $y'(1+x^2) + xy = 15x$,
(d) $y' + y\ln x = 1$ (e) $y'' + xy' = x$, $y'(0) = 1$ (f) $y'' + x^2y' = 3 + x^2$

2. Bernoulliovy rovnice. Najděte všechna řešení diferenciálních rovnic:
(a) $y' + 2xy = 2x^3y^3$ (b) $xy' + y = y^2\ln x$ (c) $y' + e^xy = y^4e^{3x}$
(d) $y' + xy = y^2x^3$ (e) $y^2y' + \frac{y^3}{x} = \sin x$ (f) $y' - \frac{y}{x^2} = \frac{y^2}{x^3}$

Výsledky 1. série

1. (a) bodová limita $f(x) = 0$, s.k. na $(0,1)$, (b) bodová limita $f(x) = 0$, s.k. na $(0, 1-\epsilon)$, l.s.k. na $(0,1)$, není s.k. na okolí 1, (c) bodová limita $f(x) = 0$, s.k. na $(0,+\infty)$, (d) bodová limita $f(x) = x$, s.k. na $(0,1)$, (e) bodová limita $f(x) = x$, s.k. na $\mathbb{R}$, (f) bodová limita $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, s.k. na $(\epsilon,+\infty)$, l.s.k. na $(0,+\infty)$, není s.k. na okolí 0, (g) bodová limita $f(x) = 0$, s.k. na $\mathbb{R}$, (h) bodová limita $f(x) = 0$, s.k. na $(0,K)$, l.s.k. na $\mathbb{R}$, není s.k. na okolí $+\infty$, (i) bodová limita $\operatorname{sgn} x \cdot \pi/2$, s.k. na $(\epsilon,+\infty)$ a $(-\infty,-\epsilon)$, l.s.k. na $(0,+\infty)$, $(-\infty, 0)$, není s.k. na okolí 0, (j) bodová limita $f(x) = e^x$, s.k. na $(-K,K)$, l.s.k. na $\mathbb{R}$, není s.k. na okolí $\pm\infty$, (k) bodová limita $f(x) = 0$, s.k. na $[0,K)$, l.s.k. na $[0,+\infty)$, není s.k. na okolí $+\infty$, (l) s.k. k $f(x) = 0$, (m) s.k. k $f(x) = x$, $x > 1$, $f(x) = 1$, $x \le 1$, (n) l.s.k. k $f(x) = 0$ na $(0,+\infty)$, s.k. na $(\epsilon,+\infty)$, není s.k. na okolí 0, (o) bodově k $f(x) = 0$ pro $|x| < 1$, $f(x) = 1$ pro $x = 1$, diverguje pro $|x| = 1$, $x \neq 1$. l.s.k. na $|x| < 1$, s.k. na $|x| < 1-\epsilon$, není s.k. u hranice, (p) l.s.k. k $\ln x$ na $[1,+\infty)$, s.k. na $[1,K)$, není s.k. na okolí $+\infty$, (q) bodová limita $f(x) = 0$, pro $x \neq \pm\frac{i}{n}$, s.k. na $\{|x| > \epsilon, x \neq \pm\frac{i}{n}\}$, l.s.k. na $\{|x| > 0, x \neq \pm\frac{i}{n}\}$, není s.k. na okolí 0.

2. (a) na $(1/e, e)$ l.s.AK (ale ne s.AK), jinde D, (b) s.K na $(-\infty,-1]$, l.s.AK (ale ne s.AK) na $(-\infty,-1)$ a $(1,+\infty)$, D na $(-1,1]$, (c) na $|x| > 1$ l.s.AK (ale ne s. AK), jinde D, (d) l.s.AK (ale ne s.AK) na $|x| > 1$, l.s.K (ale ne s.K) na $\mathbb{R} \setminus (-1,1]$, s.K na $\mathbb{R} \setminus (-1, 1-\epsilon]$, D na $(-1,1] \setminus \{0\}$, v 0 nedef., (e) l.s.AK (ale ne s.AK) na $\mathbb{R} \setminus \{-1/n, n \in \mathbb{N}\}$, v $-1/n$ není definovaná, (f) AK pro $|x| > 1$, K navíc pro $x = -1$, l.s.AK (ale ne s.AK) na $|x| > 1$, s.K na $(-\infty,-1]$ a l.s.K (ale ne s.K) na $(1,+\infty)$, (g) s.AK na $\mathbb{R}$, (h) v 0 není definovaná, na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ l.s.AK, ale ne s.AK, (i) s.AK na $\mathbb{R}$, (j) v 0 není definovaná, na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ l.s.AK, ale ne s.AK, (k) AK jen v $x = k\pi$, bodově K na $\mathbb{R}$, l.s.K (ale ne s.K) na $(2k\pi, 2(k+1)\pi)$, (l) v $M := \{-n, n \in \mathbb{N}\}$ není definovaná, AK nikde, K na $\mathbb{R} \setminus M$. s.K. na $[-K,+\infty) \setminus M$, l.s.K na $\mathbb{R} \setminus M$. (m) definovaná na $(-1,+\infty)$, AK jen pro $x = k\pi$, s.K na $(-1,+\infty)$, (n) AK jen pro $x = 0$, K na $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi\}$, D pro $x = 2k\pi$, l.s.K (ale ne s.K) na $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi\}$, (o) AK nikde, K na $\mathbb{R}$, s.K na $\mathbb{R}$, (p) AK nikde, K na $\mathbb{R}$, s.K na $\mathbb{R}$, (q) AK nikde, def. na $(-1,+\infty)$, s.k. na $(-1,+\infty)$, (r) AK nikde, s.k. na $\mathbb{R}$.

3. (a) (b)

4. (a) Y a Z jsou topologické případně metrické prostory, X libovolná množina, (b) Y a Z jsou topologické případně metrické prostory, X libovolná množina, (c) Y a Z jsou topologické případně metrické prostory, X také,

Výsledky 2. série

1. (a) bodová $f(x) = \frac{x-x^3}{6}$, l.s.k. (ale ne s.k.) na $\mathbb{R}$, (b) nedef. pro $M = \{-n, n \in \mathbb{N}\}$, bodová $f(x) = x^2$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus M$, l.s.k. (ale ne s.k.) na $\mathbb{R} \setminus M$, (c) bodová $f(x) = \frac{-1-x^2}{6}$, l.s.k. (ale ne s.k.) na $\mathbb{R}$, (d) bodová $f(x) = \frac{x+3}{2x\sqrt{x^2+x+1}}$ na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, l.s.k. (ale ne s.k.) na $(0, +\infty)$, $(-\infty, 0)$.

2. (a) $|x| < 1$ AK, $x = -1$ K, jinak D, l.s.AK (ne s.AK) na $|x| < 1$, l.s.K. na $[-1, 1)$, (b) $x = \pm 1$ nedef., $|x| > 1$ D, l.s.AK (ne s.AK a ne s.K) na $(-1, 1)$, (c) s.AK na $[-\pi/6 + 2k\pi, \pi/6 + 2k\pi]$, jinde D, (d) AK pro $|x| \leq 1$, $|x| > 1$??, l.s.AK (ne s.AK) pro $|x| < 1$, (e) AK pro $x = 0$, K pro $x \in \mathbb{R}$, l.s.K (ne l.s.AK, ne s.K) pro $x \in (-K, K)$, (f) AK pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$, K i pro $x = 2$, l.s.AK (ne s.AK) pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$, l.s.K (ne s.K) na $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

3. (a) $p \geq 2$: D, $p < 2$: AK pro $x \in [0, +\infty)$. $p + 3q/2 < 3$ s.AK na $[0, +\infty)$, $p + 3q/2 \geq 3$ l.s.AK na $[0, +\infty)$, (b) ??

4. (a) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$, spoj. a dif. na $D(f)$, (b) $D(f) = \mathbb{R}$, spoj. na $\mathbb{R}$, dif. na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

5. (a) Tvrzení jsou pravdivá, (b) Tvrzení je pravdivé, (c) Tvrzení jsou pravdivá.

Výsledky 3. série

1. (a) $r = 3$, pro $|x| = 3$ D, l.s.AK (ne s.AK ani s.K) na $|x| < 3$, (b) $r = 1$, pro $|x| = 1$, $x \neq 1$ K (ne AK), $x = 1$ D; l.s.AK (ne s.AK) na $|x| < 1$, l.s.K (ne s.K) na $\{|x| \leq 1, x \neq 1\}$; (c) $r = 1$, pro $p > 1$: pro $|x| = 1$ AK, s.AK na $|x| \leq 1$; pro $1 > p > 0$: pro $|x| = 1$, $x \neq 1$ K (ne AK), pro $x = 1$ D, l.s.AK (ne s.AK) na $|x| < 1$, l.s.K (ne s.K) na $\{|x| \leq 1, x \neq 1\}$; pro $p \leq 0$: pro $|x| = 1$ D, l.s.AK (ne s.AK ani s.K) na $|x| < 1$; (d) $r = 1/3$, střed v $x = -1$, pro $|x + 1| = 1/3$, $x \neq 4/3$ K (ne AK), $x = 4/3$ D; l.s.AK (ne s.AK) na $|x + 1| < 1/3$, l.s.K (ne s.K) na $\{|x + 1| \leq 1, x \neq 4/3\}$; (e) $r = 1$, pro $|x| = 1$ AK; s.AK na $|x| \leq 1$; (f) pro $a < 1$: $r = +\infty$, l.s.AK (ne s.AK ani s.K) na $\mathbb{C}$; pro $a > 1$ $r = 0$; pro $a = 1$ viz. (c), p=0; (g) pro $a > 1$: $r = +\infty$, l.s.AK (ne s.AK ani s.K) na $\mathbb{C}$; pro $a \leq 1$: $r = 0$; (h) pro $a \geq b$ se chová stejně, jako by $b = 0$: $r = 1/a$, K (ne AK) na kružnici kromě jednoho bodu; pro $a < b$ se chová stejně jako by $a = 0$: $r = 1/b$, AK na kružnici; (i) stejné jako (c), $p = 0$; (j) $r = 1/\sqrt{e}$, střed -2, pro $|x + 2| = 1/\sqrt{e}$ D; l.s.AK (ne s.AK ani s.K) na $|x + 2| < 1/\sqrt{e}$; (k) $r = 2^p$, pro $p \leq 0$ na kružnici D, pro $0 < p \leq 2$ K (ne AK) na kružnici kromě $x = -2^p$, kde D, pro $p > 2$ AK na kružnici; stejnoměrná konvergence vyjde jako obvykle, (l) l.s.AK (ne s.AK ani s.K) na $\mathbb{R}$

2. (a) $\frac{1+x}{(1-x)^3}$ pro $|x| < 1$, (b) $\frac{x(3-x)}{(1-x)^3}$, $|x| < 1$, (c) $(x^2/4 + x/2 + 1)e^{x/2}$, $x \in \mathbb{R}$, (d) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \ln\frac{1+x}{1-x}$, $|x| < 1$, (e) $\frac{1}{4}(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\sinh\sqrt{x} - \cosh\sqrt{x})$ pro $x > 0$, $\frac{1}{4}(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\sin\sqrt{-x} - \cos\sqrt{-x})$ pro $x < 0$ (f) ??

3. (a) $\pi/4$, (b) $\frac{1}{2e}$, (c) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\ln 2}{3}$, (d) $\ln 2 - \pi/2$, (e) $\ln 2$, (f) 6.

4. (a) všechny derivace spojité na $(1,+\infty)$, kladná, klesající, konvexní, $\lim_{x\to 1+} = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} = 0$.

Výsledky 4. série

1. (a) NE, (b) NE, (c) NE, (d) NE, (e) NE, (f) ANO, (g) NE, (h) ANO, (i) NE

2. (a) ANO, (b) NE, (c) NE, (d) NE

3. (a) NE, (b) ANO, (c) ANO, (d) NE, (e) ANO, (f) ANO, (g) ANO, (h) NE, (i) NE

4. (a) ANO, (b) ANO, (c) NE, (d) NE

5. (a) NE, (b) NE, (c) NE, (d) NE, (e) NE, (f) ANO, (g) NE, (h) ANO, (i) NE, (j) ANO, (k) NE

Výsledky 5. série

1. (a) $y(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 2$, $x \in \mathbb{R}$, (b) $e^{-x}(-x-1) + 2 - 2e^{-1}$, $x \in \mathbb{R}$, (c) $x\ln x - x + -(\frac{3}{2}\ln 3 + 2)x + \frac{3}{2}\ln 3 - 1$, $x \in (-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$, (d) ae^x, $x \in \mathbb{R}$.

2. (a)

Výsledky 6. série

1. (a)

2. (a)