

Matematická analýza 1a – 1. série

1. Nerovnice. Řešte následující rovnice a nerovnice v $\mathbf{R}$:

- (a) $||x - 2| + 1| \leq 5$, (b) $|x + 1| + |x - 2| \leq 4$, (c) $|x^2 - 4x + 3| \leq |x^2 - 4|$,
 (d) $\frac{x-1}{x+2} < \frac{x}{x+1} + 1$, (e) $\sqrt{x^2 + 2x - 3} \geq \sqrt{x^2 + 3x - 4}$,
 (f) $\cos x \leq \sin x$, (g) $1 \leq |ax + 1| < 2$ (h) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 3) \geq 0$,
 (i) $ax^2 + bx + c \geq 0$, (j) $\sin 2x = \sin x$, (k) $\log(x^2 + 1) = 2\log(3 - x)$.

2. Matematická indukce. Dokažte následující tvrzení:

- (a) $6|(10^n - 4)|$, (b) $(1 + x)^n \geq 1 + nx, \forall x \geq -1$,
 (c) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, (d) $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$,
 (e) $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} < \frac{n-1}{n+1}$ (f) $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} < 2\sqrt{n}$.

3. Výroky. Nechť M značí množinu všech mužů a $\check{Z}$ množinu všech žen. Uvažujme následující výrokové formy: $S(m, \check{z})$: „Muž m je manželem ženy $\check{z}$.“; $L_1(m, \check{z})$: „Muž m miluje ženu $\check{z}$.“; $L_2(m, \check{z})$: „Žena $\check{z}$ miluje muže m .“. Pomocí kvantifikátorů, logických spojek a forem S , L_1 a L_2 запиšte následující výroky:

- (a) Každý ženatý muž miluje svou manželku.
 (b) Každou ženu miluje nějaký muž.
 (c) Každá žena má nejvýš jednoho manžela.
 (d) Každý muž má nejvýš jednu manželku. (Říká tento výrok totéž, co c)?
 (e) Existuje vdaná žena.
 (f) Existuje ženatý muž. (Říká tento výrok totéž, co e)?

Následující výroky přeložte do češtiny.

- (g) $\exists m \in M \forall \check{z} \in \check{Z} (\neg S(m, \check{z}))$;
 (h) $\exists \check{z} \in \check{Z} \forall m \in M (L_1(m, \check{z}) \Rightarrow \neg L_2(m, \check{z}))$;
 (i) $\forall \check{z} \in \check{Z} ((\exists m \in M : L_2(m, \check{z})) \Rightarrow (\exists m \in M : L_1(m, \check{z}) \ \& \ \neg L_2(m, \check{z})))$.

4. Uveďte příklady funkcí, které splňují/nespĺňují následující výroky:

- (a) $\forall x \in [0, 1] \exists y \in [0, 1] : f(x) < f(y)$.
 (b) $\forall \delta > 0 \exists K > 0 : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < K$.
 (c) $\exists K > 0 \forall \delta > 0 : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < K$.

5. Zobrazení. (1 bod) Nechť $f : X \rightarrow Y$, $A, B \subset X$, $C, D \subset Y$. Rozhodněte, pro jaká zobrazení f platí:

- (a) $f(f_{-1}(C)) \subset C$, (b) $f(f_{-1}(C)) \supset C$,
 (c) $f_{-1}(f(A)) \subset A$, (d) $f_{-1}(f(A)) \supset A$,
 (e) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, (f) $f(A \cap B) \supset f(A) \cap f(B)$,
 (g) $f_{-1}(C \cap D) \subset f_{-1}(C) \cap f_{-1}(D)$, (h) $f_{-1}(C \cap D) \supset f_{-1}(C) \cap f_{-1}(D)$.

6. Suprema a infima. (1 bod) Najděte suprema, infima, maxima a minima následujících množin.

- (a) $\{p/(p+q); p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}\}$, (b) $\{\sin x; x \in (0, 2\pi)\}$,
 (c) $\{\sin x; x \in (0, 2\pi)\}$, (d) $\{\sin x; x \in (0, \pi)\}$,
 (e) $\{n^2 - m^2; n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}$, (f) $\{n^2 - m^2; n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, n > m\}$,
 (g) $\{n^2 - m^2; n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$, (h) $\{2^{-n} + 3^{-n}; n \in \mathbb{N}\}$,

Matematická analýza 1a – 2. série

1. Suprema a infima. (1 bod) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení pro $A, B \subset \mathbb{R}$:

- (a) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ (b) $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$
 (c) $\sup\{f(x) + g(x) : x \in I\} \leq \sup\{f(x) : x \in I\} + \sup\{g(x) : x \in I\}$
 (d) $\sup\{f(x) + g(x) : x \in I\} = \sup\{f(x) : x \in I\} + \sup\{g(x) : x \in I\}$
 (e) $\sup A = -\inf(-A)$ (f) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$

Množiny $A + B$, $A \cdot B$, $-A$ jsou definovány následujícím způsobem: $A + B = \{a + b : a \in A \text{ \& } b \in B\}$, $A \cdot B = \{a \cdot b : a \in A \text{ \& } b \in B\}$, $-A = \{-a : a \in A\}$.

2. Definice limity posloupnosti. (1 bod) Spočtěte následující limity přímo z definice:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^2}$, (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-1}{n}$, (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

3. Definice limity posloupnosti. (2 body) Spočtěte následující limity přímo z definice:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2n-1}{3n^2+1}$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$
 (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

4. Rekurentne zadané posloupnosti. (2 body)

- (a) Vyšetřete monotonii posloupnosti $a_1 = 7$, $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$, $n \in \mathbb{N}$.
 (b) Dokažte, že existuje limita posloupnosti $a_1 = x \geq -2$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, $n \in \mathbb{N}$.
 (c) Najděte limitu posloupnosti z (b).
 (d) Natděte limitu posloupnosti $a_1 = x > 0$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

5. K zamyšlení. (1 bod) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení.

- (a) Pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$.
 (b) Pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$.

6. K zamyšlení. (2 body) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení.

- (a) Pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$, $a_n > 0$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.
 (b) Pokud $0 \leq a_{m+n} \leq a_m + a_n$ pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ existuje.

Matematická analýza 1a – 3. série

1. (2 body) Spočtěte následující limity (v závislosti na parametrech):

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{k}$ (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(1+c)^n}$
 (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{2^n}$ (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{2^n}$ (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$ (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$

2. (1 bod) Spočtěte následující limity (v závislosti na parametrech):

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+2n-1}{3n^3+n-1}$, (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-1}{n}$, (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2n\sqrt{n}+\sin n}{1+2n^2+3n}$
 (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n} - \frac{n}{2}$ (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{1+1/n} - \sqrt{1+1/n})$,

3. (2 body) Spočtěte následující limity (v závislosti na parametrech):

- (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}}{n^p}$, (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n\sqrt{n+1}} - \sqrt[4]{n^3+1}}{n^p}$, (j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{1^n+2^n+\dots+n^n}}{n}$,

$$(g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)\sqrt{n+1} - (n+1)\sqrt{n-1}}{n^p}$$

4. (1 bod) Spočítejte následující limity (v závislosti na parametrech):

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+(-1)^n}{n} \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+(-1)^n n^2+1}}{n} \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n^2+1}{3+(-1)^n n}$$

V následujících úlohách využijte znalosti limity $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

5. (1 bod) Spočítejte následující limity (v závislosti na parametrech):

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+5}{n^2+n+1}\right)^n \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+5}{n^2+1}\right)^{3n^2}$$

6. (2 body) Spočítejte následující limity (v závislosti na parametrech):

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^p+1}{n^q}\right)^n \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+(-1)^n}{n}\right)^n \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} [n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})]^{n^p}$$

2.11.2006

Matematická analýza 1a – 4. série

1. **Konvergence řad.** (1 bod) Rozhodněte, zda následující řady konvergují:

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} \quad (c) \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\ln k},$$

$$(d) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^7}{2^k+3^k}, \quad (e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}, \quad (f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-2^n}{3^n+2^n},$$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n-1}, \quad (h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}, \quad (i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$$

$$(j) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (k) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}, \quad (l) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1},$$

2. **Konvergence řad.** (2 body) Rozhodněte, zda následující řady konvergují:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n+2n}}{n^2+2n^3}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p+1}{n^q+n^2-3}$$

$$(d) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2+(-1)^k}{7}\right)^k \quad (e) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k^2+7} - \sqrt[3]{k^2+3}}{\sqrt[4]{k}} \quad (f) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k-2}}{k^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

3. **Sečtěte.** (1 bod)

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \quad (b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n}$$

4. **Teorie.** (1 bod) Dokažte, nebo najděte protipříklad:

- (a) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$.
 (b) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ konverguje, potom konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
 (c) Pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
 (d) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $a_{n+1} \leq a_n$ pro všechna $n \geq 1$.
 (e) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n+1} \leq a_n$ pro všechna $n \geq n_0$.

5. **Teorie.** (2 body) Dokažte, nebo najděte protipříklad:

- (a) Pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n = 0$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
 (b) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n = 0$.

6. **Neabsolutní konvergence.** (1 bod) Rozhodněte, zda řady konvergují neabsolutně:

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\ln k}, \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2k+100}{3k+1}\right)^k \quad (c) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{3k+1}{2k+100}\right)^k$$

$$(d) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k^2+3k+4}{2k^2+4}$$

7. **Další řady.** (2 body) Rozhodněte, zda následující řady konvergují absolutně nebo neabsolutně a pro které hodnoty parametrů.

- (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^{2k}}, \quad x \in \mathbb{R}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k^2+3k+4}{2k^4+3}$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k^2+3k+4}{2k^3}$
 (d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k^2}}{2^k}, \quad x \in \mathbb{R}$ (e) $\sum_{k=1}^{\infty} k^4 x^n, \quad x \in \mathbb{R}$ (f) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}, \quad x \in \mathbb{R}$
 (g) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}, \quad x \in \mathbb{R}$ (h) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}, \quad x \in \mathbb{R}$ (i) $\sum_{k=1}^{\infty} \cos(k^2 \pi) \left(\sqrt{k+9} - \sqrt{k} \right)$
 (j) $\sum_{k=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{k^2+1})$ (k) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\sqrt{\frac{k^2}{k^2+1}} - 1 \right)$ (l) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+(-1)^k}$
 (m) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+(-1)^k}$ (n) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+(-1)^k}}$ (o) $\sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\pi) \frac{2-\cos(k\pi)}{4k}$

23.11.2006

Matematická analýza 1a – 5. série

1. (2 body) Spočtěte následující limity (v závislosti na parametrech):

- (a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x - 6}{x^2 + 2x - 8}$ (b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x+3}}{x+1}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^3+2} - \sqrt{x^4+2}}$
 (d) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$ (e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{8x+3} - \sqrt{x+6}}{(x-3)^n}, \quad n \in \mathbb{N}$

2. (3 body) Spočtěte následující limity (v závislosti na parametrech):

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{x+8} - 3} - \frac{3}{2} \right) \frac{1}{(x-1)^n}$ (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{x^\alpha}$ (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+3} - 3\sqrt{x+2} + 3\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x^\alpha}$

3. (2 body) Spočtěte následující limity (v závislosti na parametrech):

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx},$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{x},$ (c) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\sin(x/2) - \cos(x/2)},$
 (d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^2)}{e^x - e}$ (e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin x - \sin 2}{\ln(x-1)},$ (f) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \operatorname{tg} x \ln(\sin x),$

4. (3 body) Spočtěte následující limity (v závislosti na parametrech):

- (a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln 3x - \ln(2x+3)}{(x-3)^n}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^n + x - 1)}{(x-1)^n}$ (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^x + x^2 + 1) - x}{x^\alpha}$
 (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\pi/2 - \operatorname{arctg} x) x^\alpha$ (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{e^x}}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^n}$ (f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \left(\frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{x-1}} - c \right)}{\sin x - \sin 1}$
 (g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^{10} + 2^x + 1)}{\ln(x^2 + 2 \cdot 3^x + 5x)}$ (h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\sin(\sqrt{x+1} - \sqrt{(x-1)}))}{\ln x}$ (i) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \ln(\sin x) \ln(\cos x)$

5. (2 body) Spočtěte následující limity (v závislosti na parametrech):

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$ (b) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}$ (c) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$

6. (3 body) Spočtěte následující limity posloupností (v závislosti na parametrech):

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^p + 1}{n^q} \right)^n$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} [n(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1})]^{n^p}$

7. Trocha teorie. (2 body) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

- (a) Buď $a \in \mathbb{R}$. Pak $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a$, právě když $\lim_{n \rightarrow \infty} f(1/n) = a$.
 (b) Platí tvrzení v (a), pokud f je spojitá na intervalu $(0, 1)$?
 (c) Pokud $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a$, pak $\lim_{x \rightarrow 0} \lfloor f(x) \rfloor = \lfloor a \rfloor$.
 (d) Nechť $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = A$ a f je prostá, pak $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = f^{-1}(A)$.
 (e) Nechť $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in [-\infty, +\infty]$, pak $\lim_{x \rightarrow a} e^{f(x)} = e^A$.

Matematická analýza 1a – 6. série

1. Ještě pár řad. (3 body) Vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} [\sin(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})]^\alpha$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n^2+n+1) - \ln(n^2+1)}{n^\alpha}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln n \cdot \ln(1 + \frac{1}{n})$

2. Spojitost. (2 body) Je možné následující funkce spojitě dodefinovat na $\mathbb{R}$?

(a) $e^{\frac{-1}{x}}$ (b) $e^{\frac{-1}{x^2}}$ (c) $\arctg(\frac{x+1}{x-1})$
 (d) $\arctg(\frac{1}{1-\cos x})$ (e) $\sin x \cdot \ln x$ (f) $\frac{|x-1|}{x-1}$.

3. Spojitost a derivace. (2 body) Vyšetřete spojitost a derivaci následujících funkcí:

(a) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, (b) $\sin\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)$, (c) $\cos(\ln x)$,
 (d) $x \sin x \sin(\sin x)$, (e) $\sin(\cos^3 x)$ (f) $x \sin(\frac{1}{\operatorname{tg} x})$,
 (g) x^x , (h) $(\ln x)^{\cos x}$, (i) $(\frac{1}{x})^{\frac{1}{x}}$

4. Spojitost a derivace. (3 body) Vyšetřete spojitost a derivaci následujících funkcí:

(a) $\frac{|x-1|}{(x-1)^2}$, (b) $|x| \sin x$, (c) $|x^3|$,
 (d) $\ln(|\sin x| + 1)$, (e) $\arctg(\operatorname{tg}^2 x)$, (f) $\ln(\arccos x)$,
 (g) $\arcsin(\sin x)$, (h) $x \arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$, (i) $\arcsin \frac{2x}{x^2+1}$

5. Další úlohy na derivace. (3 body)

(a) Pro která $a \in \mathbb{R}$ se parabola $y = ax^2$ dotýká grafu funkce $y = \ln x$ (tj. existuje bod ležící na obou grafech, ve kterých mají tyto grafy společnou tečnu)?

(b) Pro která $a \in \mathbb{R}$ lze funkci $f(x) = x^a \sin(\ln x) \arctg x$ rozšířit na $\mathbb{R}$ tak, aby výsledná funkce byla spojitá, resp. měla konečnou derivaci, na $\mathbb{R}$?

6. Opravy starších úloh. (3 body)

(a) Buď $a \in \mathbb{R}$. Pak $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = a$, právě když $\lim_{n \rightarrow \infty} f(1/n) = a$.

(b) Platí tvrzení v (a), pokud f je spojitá na intervalu $(0, 1)$?

Dokažte nebo najděte protipříklad:

(c) Nechť $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n = 0$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(d) Nechť $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n = 0$.

Matematická analýza 1a – 7. série

1. Spojitost a derivace. (3 body) Vyšetřete spojitost a derivaci následujících funkcí:

(a) $f(x) = e^x, x > 0$ a $f(x) = x + 1, x \leq 0$ (b) $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-1}, x \neq 1$ a $f(x) = 0, x = 1$
 (c) $f(x) = x \ln x, x > 0$ a $f(x) = 0, x \leq 0$ (d) $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}, x > 1$ a $f(x) = x + 1, x \leq 1$
 (e) $f(x) = x^x, x > 0$ a $f(x) = \ln(e - x), x \leq 0$
 (f) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{x}, x > 0$ a $f(x) = e^{-x}, x \leq 0$

2. Průběh funkce. (4 body) Vyšetřete průběh následujících funkcí (tj. určete definiční obor, lichost, sudost, periodičnost, spojitost, nulové body, pozitivitu, lokální extrémy, monotonii, inflexní body, konvexnost, asymptoty v $\pm$ nekonečno, limity funkce a její derivace v problematických bodech a načrtněte graf):

- (a) $x^3 - 5x^2 + 5x - 1$ (b) $x^3 + x^2 + x + 1$, (c) $x^3 - 2x + 1$,
 (d) $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$ (e) $f(x) = \frac{x^2+2}{x-1}$, (f) $f(x) = \frac{1}{x^2+x-2}$,
 (g) $f(x) = e^x - x$ (h) $f(x) = e^{x^2+3x-7}$, (i) e^{-x^2}

3. Průběh funkce. (5 bodů) Vyšetřete průběh následujících funkcí:

- (a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$ (b) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$, (c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1}$,
 (d) $f(x) = \arctg(1-x^2)$ (e) $f(x) = \arctg(\frac{x+1}{x-1})$, (f) $f(x) = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$,
 (g) $f(x) = |x+2|e^{-1/x}$, (h) $f(x) = \sqrt[3]{|x|^3+b^3}$, (i) $f(x) = x^x$
 (j) $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$, (k) $f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$, (l) $f(x) = \frac{\sin x}{\sin(\pi/4+x)}$,

4. Nerovnosti. (3 body) Dokažte následující nerovnosti pro $0 < x < \pi/2$:

- (a) $2x < \sin x + \tg x$, (b) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$,
 (c) $2x/\pi < \sin x < x$, (d) $x^e < e^x$

5. Další úlohy. (3 body)

- (a) Dokažte, že funkce $f(x) = x + x^2 \sin(2/x)$, $f(0) = 0$ je rostoucí v bodě 0, je diferencovatelná na $\mathbb{R}$, ale není rostoucí na žádném okolí bodu 0.
 (b) Pro která $a \in \mathbb{R}$ se parabola $y = ax^2$ dotýká grafu funkce $y = \ln x$ (tj. existuje bod ležící na obou grafech, ve kterých mají tyto grafy společnou tečnu)?
 (c) Pro která $a \in \mathbb{R}$ lze funkci $f(x) = x^a \sin(\ln x) \arctg x$ rozšířit na $\mathbb{R}$ tak, aby výsledná funkce byla spojitá, resp. měla konečnou derivaci, na $\mathbb{R}$?