

## Cvičení 1 – Matematická analýza 1

## Výroky

**1. Řekněte jinými slovy za použití pouze spojek „a“ a „nebo“.**

Kdo získá z každé písemky aspoň polovinu bodů, dostane zápočet. Kdo se bude snažit, dostane zápočet. Kdo bude v hodinách aktivní, dostane zápočet. Kdo nebude nic umět a nebude se snažit, ten zápočet nedostane. Kdo bude při písemce opisovat, ten mě naštve. Příklad je správně, právě když je správně výsledek a jeho zdůvodnění. Když je výsledek správně, neznamená to, že dostanete plný počet bodů.

**2. Znegujte následující výroky.**

Kdo bude opisovat, tomu nedám zápočet. Kdo se bojí, nesmí do lesa. Komu se nelení, tomu se zelení. Kdo nepracuje, ať nejí.

**3. Znegujte výroky s kvantifikátory.**

Každý má někoho rád. Nikdo nemá rád všechny. Někdo má rád všechny kromě Pepy. Všechna přirozená čísla jsou sudá. Každé prvočíslo je liché. Některé přirozené číslo je dělitelné všemi prvočísly.

**4. Který z následujících výroků je silnější?**

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists K > 0; |f(x+1) - f(x)| \leq K$$

$$\exists K > 0 \forall x \in \mathbb{R}; |f(x+1) - f(x)| \leq K$$

Nalezněte příklady funkcí splňující resp. nesplňující tyto výroky. Znegujte.

## Matematická indukce

**4. Dokažte matematickou indukcí**

(a)  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

(b)  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(c)  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

(d)  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - (1/2)^n$

(e)  $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

13. a 14.10.2003

## Cvičení 2 – 1. ročník

**1. Definice limity** Vypočtete limity následujících posloupností přímo z definice.

$$(a) \frac{1}{1+n^2} \quad (b) \frac{n+1}{n+2} \quad (c) 1 - \left(-\frac{1}{n}\right)^n \quad (d) \frac{(-1)^n}{n}$$

**2. Na rozmyšlenou.** Rozhodněte, zda existují limity následujících posloupností.

$$(a) (-1)^n \quad (b) \cos(-1)^n \quad (c) (-1)^{n!} \quad (d) p^n$$

**3. Polynomy a odmocniny.** Vypočtěte limity následujících posloupností.

$$\begin{array}{lll} (a) \frac{n^5-1}{2n^5+1} & (b) \frac{n^2+5}{n^3+1} & (c) \frac{2n^2+n+11}{3n+1} \\ (d) \frac{n+1}{n-1} & (e) \frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{n} & (f) \frac{n+\sqrt{n}}{n\sqrt{n+1}} \\ (g) n(\sqrt{n^2+1}-n) & (h) n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) & (i) \sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}) \\ (j) \frac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-2}} & (k) \sqrt[n]{2^n+n^2} & (l) \frac{2^n+3^n}{8(-2)^n+3^{n-1}} \end{array}$$

**4. Na zapamatování.** Vypočtěte limity následujících posloupností.

$$(a) nq^n \quad (b) \sqrt[n]{n!} \quad (c) \frac{n!}{n^3} \quad (d) \frac{n!}{n^n}$$

**5. Posloupnosti s parametrem.** Vypočtěte limity následujících posloupností.

$$\begin{array}{ll} (a) n^q(\sqrt[k]{n}+1-\sqrt[k]{n}), k \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Q} & (b) \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}, a, b, c > 0 \\ (c) \frac{n^p+1}{n^q+1}, p, q \in \mathbb{Q} & (d) \frac{n!}{n^k}, k \in \mathbb{N} \end{array}$$

**6. Součty.** Vypočtěte limity následujících posloupností.

$$\begin{array}{ll} (a) \frac{1+2+\dots+n}{n^2} & (b) \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3} \\ (c) \frac{1+2+\dots+n}{n} - \frac{n}{2} & (b) \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^2} - \frac{n}{6} \end{array}$$

**7. Teorie** Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení.

- Pokud  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ , potom  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$ .
- Pokud  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , potom  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , právě když  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|a_n|} = +\infty$ .
- Pokud  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , potom  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = A$ .
- Pokud  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = A$ , potom  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , právě když  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{b_n} = A$  pro každou rostoucí posloupnost přirozených čísel  $b_n$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , právě když  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{b_n} = A$  pro každou neklesající posloupnost přirozených čísel  $b_n$ .

26. a 27.10.2004

## Matematická analýza 1 – Cvičení 3

**1. Další limity.** Vypočtěte následující limity

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+2n+n \sin 2n}{n \cos 3n+(2n+\sin 4n)^2}, \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt{n^3+1}},$$

- (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^5 + (n+1)!}{n(n^6 + n!)}$ , (d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + \sqrt{n} + (-1)^n}{n^2 + n\sqrt{n}}$ ,  
 (e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n\pi/4)\sqrt{n}$ , (f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3} - \sin n - \cos n) \frac{n^5}{\sqrt[3]{2}-1}$ ,  
 (g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2}$ , (h)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n^2})^n$

**2. Rekurentně zadané posloupnosti.** Vypočtete  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  pro

- (a)  $a_1 = \sqrt{2}$ ,  $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ ,  
 (b)  $a_1 = 0$ ,  $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(x - a_n^2)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  
 (c)  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$

**3.** Vypočtete  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx]$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , kde  $[y]$  značí celou část  $y$ .

**4. Komplexní čísla.** Vypočtete následující limity:

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-i}{2+in}$ , (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i}{n} \left( \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^n$ ,  
 (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1+i\sqrt{3})^{3n+1}}{8^n - 1}$ , (d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[n]{2} + \frac{i}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}} \right)$

**5. Teorie.** Dokažte následující implikace:

Pokud  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ ,  $a_n > 0$ , potom  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a$ .

Pokud  $0 \leq a_{m+n} \leq a_m + a_n$  pro všechna  $m, n \in \mathbb{N}$ , potom  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$  existuje.

3.11.2004

## Matematická analýza 1 – Písemka 1 (Y59)

**1.** (10 bodů) Vypočtete

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1^n + 2^n + 3^n + \dots + n^n}{n}}.$$

**2.** (10 bodů) Vypočtete

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \frac{n^2 + \sqrt{n}}{(n+1)^3 - n^3} + n^5 \sqrt{n}}{3^n - 2^n}.$$

**3.** (10 bodů) Vypočtete v závislosti na parametru  $p \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p (\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt{n^2 + 1}).$$

4.\* (10 bodů) Rozhodněte o platnosti obou implikací následujícího tvrzení:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

Své tvrzení zdůvodněte.

11. 11. 2004

## Matematická analýza — Písemka 1 (Y58)

1. (10 bodů) Vypočtěte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} - 1 \right) \cdot ((n + 1)^3 - (n - 1)^3 + \sin n)$$

2. (10 bodů) Vypočtěte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \cdot n \cdot (\sqrt[n]{2^n + 1} - \sqrt[n]{2^n - 1}).$$

3. (10 bodů) Vypočtěte v závislosti na parametrech  $p, q \in \mathbb{R}$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^q \left( \frac{n^p + 1}{n^p - 1} \sqrt{n - 1} - \sqrt{n + 1} \right)$$

4.\* (10 bodů) Rozhodněte o platnosti obou implikací následujícího tvrzení:

Platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , právě když z každé podposloupnosti  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  můžeme vybrat podposloupnost konvergující k  $a$

Své tvrzení zdůvodněte.

10. a 11.11.2004

## Matematická analýza 1 – Cvičení 4

**1. Podíly polynomů.** Rozhodněte, které z následujících řad konvergují:

- |                                               |                                                          |                                                   |
|-----------------------------------------------|----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| (a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n,$             | (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$                   | (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$          |
| (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},$ | (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}},$           | (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1},$          |
| (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1},$    | (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}+2n}{n^2+2n^3},$ | (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p+1}{n^q+n^2-3}$ |

**2. Další řady.** Rozhodněte, zda následující řady konvergují:

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n^2-1}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-2^n}{3^n+2^n},$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n-1}, \quad (e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}, \quad (f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$$

**3. Sečtěte.**

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \quad (b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n}$$

**4. Teorie.** Dokažte, nebo najděte protipříklad:

- (a) Pokud  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje, potom konverguje i  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ .
- (b) Pokud  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$  konverguje, potom konverguje i  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .
- (c) Pokud  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , potom  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje.
- (d) Pokud  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n = 0$ , potom  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje.
- (e) Pokud  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje, potom  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n = 0$ .
- (f) Pokud  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje, potom  $a_{n+1} \leq a_n$  pro všechna  $n \geq 1$ .
- (g) Pokud  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje, potom existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že  $a_{n+1} \leq a_n$  pro všechna  $n \geq n_0$ .

17. a 18.11.2004

## Matematická analýza 1 – Cvičení 5

**1. Další limity.** Vypočtěte následující limity funkcí

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3} - \sqrt{2x^2+2}}{x^p},$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x}{x^3-1}, \quad (d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{x} + x \cos x}{x+5 \sin x},$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}, \quad (f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+x^2+\dots+x^n-n}{x-1},$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+11} - \sqrt[3]{2x^2+3x-1}}{(x-5)^p}, \quad (h) \lim_{x \rightarrow 11} \frac{x-11}{x\sqrt{x-10}-11},$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1-\sqrt{x+1}}{(x-3)^p}, \quad (j) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2},$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-8x-\sqrt{3x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3+\frac{3}{x}}}, \quad (l) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}},$$

$$(m) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{|x|}}, \quad (n) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x-5} \cdot \frac{x+3}{2x-3}}{(x-6)^p},$$

$$(o) \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x} + x)$$

**2.** Nechť  $[x]$  značí celou část čísla  $x$ . Vypočtěte limity následujících funkcí:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{[x]}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x]}{x}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} [x] - x, \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} x - [x]$$

## Matematická analýza 1 – Cvičení 6

**1. Základní limity.** Dokažte a zapamatujte si:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$  (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^p \log^q x}{x^p} = 0, p, q > 0$   
 (c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log^q x}{x^p} = 0, p, q > 0$  (d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{ax}}{x^p} = +\infty, p \in \mathbb{R}, a > 0$   
 (e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^p e^{ax} = 0, p \in \mathbb{R}, a > 0$  (f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^p \frac{e^{ax}}{x^p} = 0, p \in \mathbb{R}, a < 0$

**2. Jednoduché limity.** Vypočtěte následující limity:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$  (b)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$   
 (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x^2},$  (d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$

**3. Složitější limity.** Vypočtěte následující limity:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x}$  (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$   
 (c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi/2 - x) \operatorname{tg} x,$  (d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi/2 - \operatorname{arctg} x)x$   
 (e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\sin^2 x} - \cos x}{x^2},$  (f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x \sin x) - 1}{\cos(\sin x) - 1}$

**4. Ze Zajíčka.** Vypočtěte následující limity:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin(\sin x))}{\cos(\pi/2 \cos x)},$  (b)  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{(\pi/4 - x)^3},$   
 (c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos \sqrt{x-1} - \cos \sqrt{x+1})$  (d)  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}(\pi/4 - x),$   
 (e)  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x},$  (f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos \alpha x)}{\ln(\cos \beta x)}$   
 (g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}{\ln(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})},$  (h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + 2^x) \ln(1 + \frac{3}{x})$   
 (i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2^x + x + 1)}{\ln(x^{10} - x + 1)},$  (j)  $\lim_{x \rightarrow +0} \left( \frac{1+x2^x}{1+x3^x} \right)^{x^2}$

8. 12. 2004

## Matematická analýza — Píemka 2 (Y59)

**1.** (10 bodů Vypočte následující limitu v závislosti na parametru  $k \in \mathbb{Z}$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x^k}.$$

**2.** (10 bodů Vypočte:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sin(1/x)) \ln(\sin x + 2)}{\ln(1/x)}.$$

3. (10 bodů Vypočtee:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \left( \frac{2 \ln \sin x}{\ln(2 - 2 \cos x)} \right)^{1/x}.$$

9. 12. 2004

## Matematická analýza — Písemka 2 (Y58)

1. (10 bodů) Vypočtete následující limitu v závislosti na parametru  $k \in \mathbb{Z}$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - e^{\cos 2x}}{x^k}.$$

2. (10 bodů) Vypočtete:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \ln(\cos x) \ln(\sin x).$$

3. (10 bodů) Vypočtete:

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \left( \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2}}{2(\sqrt{x + 1} - \sqrt{2})} \right)^{\frac{1}{x-1}}.$$

8. a 9.12.2004

## Matematická analýza 1 – Cvičení 7

1. **Derivace.** Vyšetřete spojitost a derivaci následujících funkcí:

- |                                               |                                           |                       |
|-----------------------------------------------|-------------------------------------------|-----------------------|
| (a) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$                 | (b) $\sin\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right),$ | (c) $\cos(\ln x),$    |
| (d) $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}},$ | (e) $(\sin x)^{\cos x},$                  | (f) $x^x,$            |
| (g) $\arctg(\tg^2 x),$                        | (h) $\ln(\arccos x),$                     | (i) $\arcsin(\sin x)$ |

2. **Ze Zajíčka.** Vyšetřete spojitost a derivaci následujících funkcí:

- |                                                  |                                |
|--------------------------------------------------|--------------------------------|
| (a) $x \arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right),$ | (b) $\arcsin \frac{2x}{x^2+1}$ |
|--------------------------------------------------|--------------------------------|

**3. Průběh funkce** Vyšetřete průběh následujících funkcí (tj. určete definiční obor, nulové body, pozitivitu, lokální extrémy, monotonii, inflexní body, konvexnost, asymptoty v  $\pm$  nekonečnu a načrtněte graf):

- (a)  $x^3 - 5x^2 + 5x - 1$  (b)  $x^3 + x^2 + x + 1$ , (c)  $x^3 - 2x + 1$ ,  
 (d)  $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$  (e)  $f(x) = \frac{x^2+2}{x-1}$ , (f)  $f(x) = \frac{1}{x^2+x-2}$ ,  
 (g)  $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$  (h)  $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ , (i)  $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1}$ ,  
 (j)  $f(x) = \operatorname{arctg}(1-x^2)$  (k)  $f(x) = \operatorname{arctg}(\frac{x+1}{x-1})$ , (l)  $f(x) = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$ ,  
 (m)  $f(x) = e^x - x$  (n)  $f(x) = e^{x^2+3x-7}$ , (o)  $f(x) = x^x$

**4. Ze Zajíčka.** Vyšetřete průběh následujících funkcí:

- (a)  $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$ , (b)  $f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$ , (c)  $f(x) = \frac{\sin x}{\sin(\pi/4+x)}$ ,  
 (d)  $f(x) = |x+2|e^{-1/x}$ , (e)  $f(x) = \sqrt[3]{|x|^3 + b^3}$ , (f)  $e^{-x^2}$

**5. Ze Zajíčka.** Dokažte následující nerovnosti pro  $0 < x < \pi/2$ :

- (a)  $2x < \sin x + \operatorname{tg} x$ , (b)  $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ ,  
 (a)  $2x/\pi < \sin x < x$ , (b)  $x^e < e^x$

**6. Další úlohy.**

Dokažte, že funkce  $f(x) = x + x^2 \sin(2/x)$ ,  $f(0) = 0$  je rostoucí v bodě 0, je diferencovatelná na  $\mathbb{R}$ , ale není rostoucí na žádném okolí bodu 0.

Pro která  $a \in \mathbb{R}$  se parabola  $y = ax^2$  dotýká grafu funkce  $y = \ln x$  (tj. existuje bod ležící na obou grafech, ve kterých mají tyto grafy společnou tečnu)?

Pro která  $a \in \mathbb{R}$  lze funkci  $f(x) = x^a \sin(\ln x) \operatorname{arctg} x$  rozšířit na  $\mathbb{R}$  tak, aby výsledná funkce byla spojitá, resp. měla konečnou derivaci, na  $\mathbb{R}$ ?

5. 1. 2005

## Matematická analýza — Písemka 3 (Y59)

1. (10 bodů Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{4x-1}{2x^2+1}\right) & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus [-2, 0], \\ -\frac{\pi}{2} - \sqrt{1-(x+1)^2} & \text{pro } x \in [-2, 0]. \end{cases}$$

Určete:

1.  $D(f)$ , limity v krajních bodech  $D(f)$ , spojitost, periodu, sudost, lichost
2. Nulové body, pozitivitu, negativitu



3.  $f'$ , monotonii, jednostranné derivace a derivace v problematických bodech, lokální extrémy a hodnotu v nich
4.  $f''$ , konvexitu a konkavitu, inflexní body.  
Nakreslete graf.

6. 1. 2005

## Matematická analýza — Písemka 3 (Y58)

1. (10 bodů) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \left( \frac{x^2 - |1 - x^2|}{2x^2} \right) & \text{pro } x \neq 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Určete

1.  $D(f)$ , limity v krajních bodech  $D(f)$ , spojitost, periodu, sudost, lichost
2. Nulové body, pozitivitu, negativitu
3.  $f'$ , monotonii, jednostranné derivace a derivace v problematických bodech, lokální extrémy a hodnotu v nich
4.  $f''$ , konvexitu a konkavitu, inflexní body.  
Nakreslete graf.

14. 1. 2004

## Matematická analýza — Opravná písemka (Y58+Y59)

1. (10 bodů) Vypočtěte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[6]{n} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 1} - n}{\sqrt{n^2 + 1} - n}.$$

2. (10 bodů) Vypočtěte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sqrt{n} + \sin n}{(2n + 1)^2}.$$

3. (10 bodů) Vypočtěte

$$\lim_{x \rightarrow 4+} \frac{\sqrt{x + 5} - x + 1}{\sqrt{x - 4}}.$$

**4.** (10 bodů) Vypočtete

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\cos x - 1)}{\ln \frac{1+x}{1-x}}.$$

**5.** (10 bodů) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}.$$

**6.** (10 bodů) Vyšetřete průběh funkce

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$