26. a 27.2.2007

Matematická analýza 1b – 1. série

1. Doplňte následující tvrzení a dokažte:
Je-li $f(x) = o(x^n)$ a $g(x) = o(x^m)$ pro $x \to 0$, pak $f(x) + g(x) = ?$
Je-li $f(x) = o(x^n)$ pro $x \to 0$, pak $x^k \cdot f(x) = ?$
Je-li $f(x) = o(x^n)$ a $g(x) = o(x^m)$ pro $x \to 0$, pak $f(x) \cdot g(x) = ?$
Je-li $f(x) = o(x^n)$ a $g(x) = O(x^m)$ pro $x \to 0$, pak $f(x) \cdot g(x) = ?$
Je-li $f(x) = o(x^n)$ a $g(x) = o(x^m)$ pro $x \to 0$, pak $f(g(x)) = ?$
Je-li $f(x) = 1 + kx + o(x)$, pak $\lim_{x\to 0} f(x)^{1/x} = ?$
Je-li $f(x) = x + o(x)$ a $g(x) = x + o(x)$, pak $\frac{f(x)}{g(x)} = ?$

2. Najděte množinu všech $\alpha \in \mathbb{R}$ takových, že $f(x) = o(x^\alpha)$:
(a) $f(x) = \sin^2(x) - \sin x^2$,
(b) $f(x) = 1 - \cos^k(x^m)$,
(c) $f(x) = \sin(\sin x) - \sin x$
(d) $f(x) = \sin(x \sin x) - x \sin\sin x$
(e) $f(x) = e^x - \sin x - \cos x$,
(f) $f(x) = \cos x^k - \cos^k x$

3. Vypočtěte Taylorův polynom n-tého stupně následujících funkcí v bodě $x_0 = 1$ a zapamatujte si:
(a) e^{3x-3},
(b) $\ln(2x - 1)$,
(c) $\cos(\pi x)$,
(d) $\frac{1}{x}$
(e) $\mathrm{tg}(x - 1)$,
(f) $\arcsin(x - 1)$,
(g) $\arccos x$,
(h) $\sqrt{1 + x}$

4. Vypočtěte Taylorovy polynomy stupně n následujících funkcí v bodě 0:
(a) $n = 4$, $5x^3 - 2x + 1$,
(b) $n = 4$, $\sin x + \cos x$,
(c) $n = 5$, $e^x \sin x$
(d) $n = 3$, $\sin(x^2 - 2x)$,
(e) $n = 4$, $e^{\sin x}$,
(f) $n = 3$, $\sin\sin x$,
(g) $n = 4$, $\cos(\cos x - 1)$,
(h) $n = 5$, $\log\cos x$

5. Vypočtěte Taylorův polynom třetího stupně následujících funkcí v daných bodech:
(a) $\sin x$ v bodě $\pi/2$
(b) $\cos x$ v bodě π
(c) $x^3 - 2x + 1$ v bodě 1
(d) $e^{\sin x}$ v bodě 1

6. Vypočtěte pomocí Taylorova polynomu s přesností na 3 desetinná místa:
(a) $\sqrt{16\frac{1}{2}}$,
(b) $\ln(3/2)$,
(c) e^1,
(d) e^3

7. Pomocí Taylorova polynomu spočtěte následující limity:
(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$,
(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$
(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \arcsin x}{x^p}$,
(d) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{\sin x - 1 + (x-\pi/2)^2}{(x-\pi/2)^4}$
(e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}\, x - x}{x^p}$,
(f) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\log x - (x-1)}{(x-1)^2}$
(g) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$,
(h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)$
(i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}\right)$,
(j) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right)$
(k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$,
(l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$
(m) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\sin x - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$,
(n) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{cotg}\, x - 1/x}{x^3}$
(o) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - (\sin x)^{\cos x}}{x^3}$,
(p) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - e^{-\frac{x^2}{6}}}{x^4}$

5. a 6.3.2007

Matematická analýza 1b – 2. série

1. Vyjádřete uvedené primitivní funkce na maximálních intervalech pomocí elementárních funkcí:
(a) $\int x^3 \sin x \, \mathrm{d}x$ (b) $\int x^n e^x \, \mathrm{d}x$ (c) $\int \ln x \, \mathrm{d}x$ (d) $\int x \ln x \, \mathrm{d}x$
(e) $\int e^x \sin x \, \mathrm{d}x$ (f) $\int x e^x \sin x \, \mathrm{d}x$ (g) $\int x^2 e^x \sin x \, \mathrm{d}x$ (h) $\int x e^x \cos x \, \mathrm{d}x$

2. Vyjádřete uvedené primitivní funkce na maximálních intervalech pomocí elementárních funkcí:
(a) $\int \ln^2 x \, \mathrm{d}x$ (b) $\int x^n \ln^m x \, \mathrm{d}x$ (c) $\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$ (d) $\int \sin^4 x \, \mathrm{d}x$
(e) $\int \sqrt[5]{3x+2} \, \mathrm{d}x$ (f) $\int \frac{x^2}{\cos^2(x^3)} \, \mathrm{d}x$ (g) $\int \frac{1}{x \ln x} \, \mathrm{d}x$ (h) $\int \frac{1}{x \ln x \ln\ln x} \, \mathrm{d}x$
(i) $\int \mathrm{tg}\, x \, \mathrm{d}x$ (j) $\int \sin^3 x \, \mathrm{d}x$ (k) $\int \mathrm{tg}^2\, x \, \mathrm{d}x$ (l) $\int \frac{1}{\sin x} \, \mathrm{d}x$
(m) $\int \frac{x^3}{(x-3)^{50}} \, \mathrm{d}x$ (n) $\int e^{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$ (o) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} \, \mathrm{d}x$ (p) $\int \frac{x}{1+x^4} \, \mathrm{d}x$

3. Vyjádřete uvedené primitivní funkce na maximálních intervalech pomocí elementárních funkcí:
(a) $\int |\cos x| \, \mathrm{d}x$ (b) $\int \sqrt{x^6} \, \mathrm{d}x$ (c) $\int |x| \, \mathrm{d}x$ (d) $\int \sin|2x-1| \, \mathrm{d}x$
(e) $\int \arcsin(\sin x) \, \mathrm{d}x$ (f) $\int f(x) \, \mathrm{d}x$, kde $f(x) = xe^{1-x^2}$, $|x| \geq 1$ a $f(x) = \sin(\pi x)$ jinak.

4. Dokažte pro $k \in \mathbb{N}$: $\int \frac{1}{(x^2+1)^{k+1}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2k} \frac{x}{(x^2+1)^k} + \frac{2k-1}{2k} \int \frac{1}{(x^2+1)^k} \, \mathrm{d}x$.

5. Vypočtěte primitivní funkce na maximálních intervalech:
(a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+3)^5} \, \mathrm{d}x$ (b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+5x+8)} \, \mathrm{d}x$ (c) $\int \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^3} \, \mathrm{d}x$
(d) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} \, \mathrm{d}x$ (e) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3} \, \mathrm{d}x$ (f) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+x+1)^3} \, \mathrm{d}x$

6. Vyjádřete uvedené primitivní funkce na maximálních intervalech pomocí elementárních funkcí:
(a) $\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x+1} \, \mathrm{d}x$ (b) $\int \frac{1}{\sqrt{e^x+1}} \, \mathrm{d}x$ (c) $\int \frac{\ln x \sin(\ln^2 x)}{x} \, \mathrm{d}x$ (d) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} \, \mathrm{d}x$

12. a 13.3.2007

Matematická analýza 1b – 3. série

1. Vypočtěte primitivní funkce rozložením na parciální zlomky:
(a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+3)(3x+2)(x+1)}$ (b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^4+16)}$ (c) $\int \frac{5x^3+3x^2-x-1}{(x^2+2x+1)} \, \mathrm{d}x$
(d) $\int \frac{(5x^2+1)^2+1}{(3x+2)^2} \, \mathrm{d}x$ (e) $\int \frac{x^2+1}{x^2-1} \, \mathrm{d}x$ (f) $\int \frac{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^3-3x^2+3x-1} \, \mathrm{d}x$

2. Převeďte na integrály z racionálních funkcí a určete definiční obory primitivních funkcí:
(a) $\int \frac{x+\sqrt{3x-1}}{2x^2+1} \, \mathrm{d}x$ (b) $\int \frac{x^2-\sqrt[3]{2x+1}}{x-\sqrt{2x+1}} \, \mathrm{d}x$ (c) $\int \frac{\sqrt[3]{\frac{2x+2}{x-1}}+2x}{x^2-1} \, \mathrm{d}x$
(d) $\int \frac{\sqrt{(3x+1)(2x+1)}}{3x^2+2} \, \mathrm{d}x$ (e) $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}} \, \mathrm{d}x$ (f) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}-x-2} \, \mathrm{d}x$

3. Převeďte na integrály z racionálních funkcí a určete definiční obory primitivních funkcí:
(a) $\int \frac{\sqrt{5x^2+3x+1}+2x}{3x+2} \, \mathrm{d}x$ (b) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} \, \mathrm{d}x$ (c) $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+x+2}+x} \, \mathrm{d}x$
(d) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-x} \, \mathrm{d}x$ (e) $\int \frac{(3x+2)\sqrt{4x^2+1}}{x^2+x+1} \, \mathrm{d}x$ (f) $\int \frac{x^3\sqrt{x^4+x^2+4}+x}{3x^4+1} \, \mathrm{d}x$

4. Převeďte na integrály z racionálních funkcí a určete definiční obory primitivních funkcí:
(a) $\int \frac{e^{3x}+e^{2x}-5e^x+1}{e^{4x}+1}\ \mathrm{d}x$ (b) $\int \frac{\ln x}{x(\ln^2 x+1)}\ \mathrm{d}x$ (c) $\int \frac{e^{2x+1}}{e^x+e^{-x}}\ \mathrm{d}x$

5. Převeďte na integrály z racionálních funkcí a určete definiční obory primitivních funkcí:
(a) $\int \frac{1}{\sin x+\sin^3 x}\ \mathrm{d}x$ (b) $\int \frac{\sin x}{\sin^4 x+\cos^2 x}\ \mathrm{d}x$ (c) $\int \frac{\sin^2 x+1}{\sin^2 x\cos x+\cos x}\ \mathrm{d}x$
(d) $\int \frac{\sin x\cos x+2}{\sin^2 x+\sin x\cos x}\ \mathrm{d}x$ (e) $\int \frac{1}{5+\cos x+\sin x\cos x}\ \mathrm{d}x$ (f) $\int \frac{1+2\cos x}{3+2\sin x}\ \mathrm{d}x$

6. Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech:
(a) $\int \frac{1}{\sin x+\operatorname{tg} x}\ \mathrm{d}x$ (b) $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\ \mathrm{d}x$ (c) $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x+1}{\sin^2 x+\sin x\cos x}\ \mathrm{d}x$
(d) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x+\cos x+2}\ \mathrm{d}x$ (e) $\int \frac{1}{5+\cos x}\ \mathrm{d}x$ (f) $\int \frac{1+\sin^2 x}{3\cos x+2\cos^3 x}\ \mathrm{d}x$

26. a 27.3.2007

Matematická analýza 1b – 4. série

1. Vypočtěte primitivní funkce na maximálních intervalech:
(a) $\int \frac{e^x}{2+\sin e^x}\ \mathrm{d}x$ (b) $\int \frac{x}{\sin(x^2+1)+1}$ (c) $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}\ \mathrm{d}x$
(d) $\int \frac{\sin(x+1)}{\cos(x+3)}\ \mathrm{d}x$ (e) $\int \frac{2\cos x}{\sqrt{\sin x+1}+1}\ \mathrm{d}x$ (f) $\int \sin 2x\sqrt{\cos^2 x+5}\ \mathrm{d}x$
(g) $\int x\sin\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\ \mathrm{d}x$ (h) $\int \sqrt{x+\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$

2. Vypočtěte primitivní funkce na maximálních intervalech:
(a) $\int \sin(\pi x)\lfloor x\rfloor\ \mathrm{d}x$ (b) $\int x\sin x\cos x\ \mathrm{d}x$ (c) $\int \frac{1}{1+|\cos x|}\ \mathrm{d}x$
(d) $\int (x^2+x)\operatorname{arctg} x\ \mathrm{d}x$ (e) $\int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2}\ \mathrm{d}x$ (f) $\int \frac{x^2+|x+1|}{x^2-1}\ \mathrm{d}x$
(g) $\int \frac{1}{x^5+1}\ \mathrm{d}x$ (h) $\int \frac{\operatorname{cotg}(x-1)}{\sin x-\operatorname{tg}(2x)}\ \mathrm{d}x$ (i) $\int \frac{\sin(2x+1)}{2+\cos(2x-1)}\sin x\ \mathrm{d}x$
(j) $\int x\frac{1+\sin(x^2+1)}{2+\sin(2x^2+1)}\ \mathrm{d}x$ (k) $\int \frac{\sqrt{\sin^2 x+\sin x+1}}{\cos x}\ \mathrm{d}x$ (l) $\int \frac{\sin 2x+|\cos(x+1)|}{2+\sin x}\ \mathrm{d}x$
(m) $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\ \mathrm{d}x$ (n) $\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}\ \mathrm{d}x$ (o) $\int \frac{2^x 3^x}{9^x-4^x}\ \mathrm{d}x$
(p) $\int \cos^5 x\sqrt[3]{\sin x}\ \mathrm{d}x$ (q) $\int \sqrt{a^2-x^2}\ \mathrm{d}x$ (r) $\int x^2\ln\frac{x^2+1}{x-1}\ \mathrm{d}x$
(s) $\int \frac{x}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}x$ (t) $\int \frac{\sin x}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}\ \mathrm{d}x$ (u) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^{2n}+x^n+1}}\ \mathrm{d}x$
(v) $\int \max(\sin x,\cos x)\ \mathrm{d}x$ (w) $\int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1}\ \mathrm{d}x$
(x) $\int (x^2+1)\operatorname{arctg}(\frac{1+x}{1-x})\ \mathrm{d}x$

3. Vypočtěte určité integrály metodou per-partes:
(a) $\int_0^{5\pi} x^3\sin x\ \mathrm{d}x$ (b) $\int_{-\infty}^0 xe^x\ \mathrm{d}x$ (c) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\ \mathrm{d}x$

4. Vypočtěte určité integrály:
(a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\ \mathrm{d}x$ (b) $\int_0^{\pi} \sin^3 x\ \mathrm{d}x$ (c) $\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x^2-1}}\ \mathrm{d}x$
(d) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^2(x^2-1)}\ \mathrm{d}x$ (e) $\int_{-10}^{+\infty} \frac{3x+5)}{x^2+x+1}\ \mathrm{d}x$ (f) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^4+1}\ \mathrm{d}x$
(g) $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^p}\ \mathrm{d}x$ (h) $\int_{-1}^{+\infty} \frac{1+\sqrt{x+1}}{x^2+\sqrt{x+1}}\ \mathrm{d}x$ (i) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{4x^2+x+1}}\ \mathrm{d}x$
(j) $\int_0^{6\pi} x\frac{\sin(x^2)}{2+\sin(x^2)}\ \mathrm{d}x$ (k) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x+\sin 2x+1}{1+\cos x}\ \mathrm{d}x$ (l) $\int_{-2}^{2} \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}-x}\ \mathrm{d}x$
(m) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-3x+2}+x}{x^2+2}\ \mathrm{d}x$ (n) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+3x+2}\ \mathrm{d}x$

5. Vypočtěte určité integrály:
(a) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \arcsin(\operatorname{arctg} x)\ \mathrm{d}x$, (b) $\int_0^1 (x+1)\log\frac{x+\sqrt{x+1}}{x+2}\ \mathrm{d}x$,

(c) $\int_1^e \frac{1}{x} \operatorname{tg}^2 \sqrt{\log x^2 + 1}\,\mathrm{d}x$, (d) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$, $a > 0$,
(e) $\int_0^{\pi/2} \log \sin x\,\mathrm{d}x$ (subst. $x = 2t$)

6. Vypočtěte plochy ohraničené následujícími křivkami:
(a) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$
(b) $f(x) = x^n$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$, $x \in [0, 1]$
(c) $f(x) = \sin x$, $g(x) = -\sin x$, $x \in [0, \pi]$
(d) $f(x) = x^2$, $g(x) = 1/x$, $h(x) = 0$, $x \in [0, +\infty)$
(e) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$

10. a 16.4.2007

Matematická analýza 1b – 5. série

1. Určete a načrtněte definiční obory následujících funkcí:
(a) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 + y^2}$, (b) $f(x,y) = \frac{1}{\ln(xy)}$, (c) $f(x,y) = \sqrt{x + y^2}\ln(xy - 1)$,
(d) $f(x,y) = \arccos\left(\frac{x}{x+y}\right)$, (e) $f(x,y) = \sqrt{x - \sqrt{y+1}}$, (f) $f(x,y) = \sqrt{xy^2 + xy^2}$,

2. Nakreslete vrstevnice následujících funkcí:
(a) $f(x,y) = |x| + |y|$, (b) $f(x,y) = x - 2y + 3$, (c) $f(x,y) = x^2 + 9y^2 + 1$,
(d) $f(x,y) = xy$, (e) $f(x,y) = x^5 + y^5$, (f) $f(x,y) = x + \frac{1}{y}$,

3. Vypočtěte následující limity nebo dokažte, že neexistují:
(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{2x+y}$, (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^3+y^3}$
(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(xy+1)}{x+y}$, (e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^4+y^4}$ (f) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$
(g) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,a)} \left(x + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$, (h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x^2}\sin\frac{x^2}{y}$ (i) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+y)}{e^y - x}$

4. Lze následující funkce dodefinovat tak, aby byly spojité na $\mathbb{R}^2$?
(a) $f(x,y) = \frac{x-y}{x^3-y^3}$, (b) $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$, (c) $f(x,y) = \frac{xy}{|x|+y^2}$
(d) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2-y^2x^3}{x^2+y^2}$, (e) $f(x,y) = \frac{\sin x \sin^3 y}{1-\cos(x^2+y^2)+6|xy^3|}$

5. Rozhodněte, zda jsou následující funkce metriky:
(a) $\rho(x,y) = |x| + |y|$, x, $y \in \mathbb{R}$ (b) $\rho(x,y) = (x - y)^2$, x, $y \in \mathbb{R}$
(c) $\rho(x,y) = \sqrt{|x - y|}$, x, $y \in \mathbb{R}$,
(d) $\rho(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)|, x \in [0,1]\}$, f, g omezené funkce na $[0,1]$,
(e) $\rho((x_n),(y_n)) = |\lim x_n - \lim y_n|$, (x_n), (y_n) konvergentní posloupnosti,
(f) $\rho(x,y) = \min\{|x_i - y_i|, i = 1,2,3\}$, $x = (x_1,x_2,x_3)$, $y = (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3$,
(g) $\rho(A,B) = \sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d(a,b)$, A, $B \subset M$ uzavřené, omezené d metrika na M,
(h) $\rho(A,B) = \inf_{a\in A}\sup_{b\in B} d(a,b)$, A, $B \subset M$ uzavřené, omezené d metrika na M,
(i) $\rho(x,y) = \{x\} + \{y\}$, x, $y \in \mathbb{R}$, $\{x\}$ značí zlomkovou část x.

6. Rozhodněte, zda jsou následující množiny otevřené, uzavřené, omezené:
(a) $\{x \in \mathbb{R} : -1 < x^2 \leq 3\}$, (b) $\{x^2 : -1 < x < 5\}$,
(c) $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, (d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 > xy > 0\}$,
(e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ln(x - y) \leq 1\}$, (f) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy + yz + zx < 1\}$,

7. Rozhodněte, zda platí následující implikace pro $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:
(a) Jestliže funkce $f_y : x \mapsto f(x,y)$ je spojitá pro každé $y \in \mathbb{R}$, pak f je spojitá.
(b) Jestliže funkce $f_y : x \mapsto f(x,y)$ je spojitá pro každé $y \in \mathbb{R}$ a $f_x : y \mapsto f(x,y)$ je spojitá pro každé $x \in \mathbb{R}$ pak f je spojitá.

17. a 23.3.2007

Matematická analýza 1b – 6. série

1. Vypočtěte parciální derivace následujících funkcí v bodech $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$:
(a) x^2+y^2, (b) $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+y+1}$, (c) $(1+xy)^{x+y}$,
(d) $\frac{xy}{x^2+y^2}$, dodefinované $f(0,0)=0$, (e) $\frac{\sin xy}{xy}$, dodefinované $f(x,0)=f(0,y)=1$,
(f) $(|x|+|y|)^{xy}$, dodefinované $f(0,0)=1$, (g) $\frac{|\sin x|+|\sin y|}{|x|+|y|}$, dodefinované $f(0,0)=1$.

2. Vypočtěte derivace ve směru $(1,1)$, $(-1,0)$, $(-1,2)$ funkcí z cvičení 1 (v bodech z cvičení 1).

3. Vyšetřete spojitost funkcí z cvičení 1.

4. Vypočtěte totální diferenciály funkcí z cvičení 1 v bodech $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$.

5. Vypočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu a totální diferenciál druhého řádu následujících funkcí:
(a) $x^3+2xy+y$, (b) $\frac{x^2+y^2}{2xy+1}$, (c) $\sqrt{x^2+y^3}^3$, (d) $(1+x)^(1+y)$,
(e) $\frac{2xy}{x^2+y^2}$ dodef. $f(0,0)=0$, (f) $\frac{\sin(x+y)}{x+y}$ dodef $f(x,-x)=1$.

6. Vypočtěte parciální derivace podle x a y funkce $g \circ f$, tj. $(x,y) \mapsto g(f(x,y))$:
(a) $f(x,y)=x+y$, $g(z)=z^2$ (b) $f(x,y)=(x^2,xy)$, $g(z,w)=z^2+zw+w^2$
(c) $f(x,y)=(xy,x+y,x^2+1)$, $g(u,v,w)=(u\cdot v\cdot w, u+v+w)$

7. Pomocí totálního diferenciálu vypočtěte přibližně následující výrazy:
(a) $1,1^{0,9}$ (b) $\sqrt{5,1+(1,9)^2}$ (c) $\frac{\sin 0,15}{\sqrt{9,1}}$ (d) $e^{0,85\cdot(1-\cos 0,1)}$

8. (a) Strany kvádru mění v čase velikost podle vzorce $a(t)=1+t$, $b(t)=\sqrt{1+t}$, $c(t)=\frac{1}{1+t}$. Zvětšuje se kvádr v čase $t=0$, $t=1$, $t=10$ nebo zmenšuje? Jak rychle? (Čas je v sekundách, délky hran v centimetrech).
(b) Letadlo má v čase t polohu $(2\cos t, 3\sin t, -t^2/5)$. Určete velikost rychlosti letadla v čase t.
(c) Autobus má v čase t polohu $(15t, \sin(t/10))$. Po podlaze autobusu se kutálí kulička, její vzdálenost od předku autobusu v čase t je $1+\sin 2t$, vzdálenost od pravého boku je $0,3+\cos 2t$. Jaká je rychlost kuličky (vektor rychlosti, nikoli velikost rychlosti) vzhledem k zemi? Autobus se otáčí podle toho, kterým směrem jede!

9. Najděte funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, která
(a) má parciální derivace v bodě $(0,0)$, ale nemá derivace ve všech směrech v bodě $(0,0)$.
(b) má parciální derivace v každém bodě, ale nemá derivace ve všech směrech v bodě $(0,0)$.
(c) má derivaci v každém směru v bodě $(0,0)$, ale není spojitá v bodě $(0,0)$.
(d) má derivaci v každém směru v bodě $(0,0)$ a je spojitá v bodě $(0,0)$, ale nemá totální diferenciál v bodě $(0,0)$.

30.4. a 1.5.2007

Matematická analýza 1b – 7. série

1. Rozhodněte, na okolí kterých bodů určují následující rovnice funkci $y = y(x)$, resp. funkci $x = x(y)$.
(a) $x^2 + y^2 = 1$, (b) $y - 2\ln y = x$, (c) $x^2 + 2xy - y^2 = 4$,
(d) $e^{xy} + \sin y + y^2 = 1$, (e) $x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^5 = 1$.

2. Vypočtěte derivace y', y'' funkcí z cvičení 1.

3. Vypočtěte parciální derivace $\frac{\partial z}{\partial x}$ a $\frac{\partial z}{\partial y}$ funkcí zadaných následujícími rovnicemi. Nejprve ověřte, že daná rovnice skutečně definuje funkci $z = z(x,y)$.
(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, (b) $yz + xz + xy = x^2 + z^2$, (c) $x + 2xy - 3xyz = 0$,
(d) $e^{xyz} + x\sin z + y^2 = 1$, (e) $e^{yz} - xy\ln z = 2$.

4. Vypočtěte parciální derivaci $\frac{\partial z}{\partial x}$ funkce z definované předpisem $F(x^2 - z^2, y^2 - xz) = 0$.

5. Vypočtěte tečnou rovinu k dané množině v daném bodě:
(a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 22\}$, $b = (3,2,1)$,
(b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy + \ln yz - xz^2 = 0\}$, $b = (2,1,1)$,
(c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz - \cos(xy) - z^3 = 0\}$, $b = (1,0,-1)$.

6. Najděte lokální extrémy následujících funkcí a rozhodněte, zda se jedná o maxima nebo o minima:
(a) $x^2 + 2x + 2 + y^2$, (b) $x^2 + 4x + 5 - 3y^2 - 3y$, (c) $3x + 5 - 2x^2 - y^2$,
(d) $x^2 - 3xy - y^2 + 5x + 2y$, (e) $\frac{|xy|}{x^2+y^2}$ dodefinované $f(0,0) = 0$,
(f) $\sin x \sin y \sin(x+y)$, (g) $xy\ln(x^2 + y^2)$, (h) $e^{x^2-y}(5 - 2x + y)$
(i) $x^4 + y^4 - (x+y)^2$, (j) $x^3 + y^2 - 2xy - x + 2$, (k) $x^3 + xy^2 - 2xy$.

7. Vyšetřete lokální extrémy funkce $z(x,y)$ zadané rovnicí:
(a) $x^2 + y^2 + z^2 - xy + xz + z + y = 5$, (b) $x + 2xyz + z^2 - 1 = 0$.

8. Rozhonděte, zda se ve cvičení 6 jedná o globální extrémy.

9. Najděte maximum a minimum následujících funkcí v krychli $|x| \le 1$, $|y| \le 1$, $|z| \le 1$:
(a) $2x + 3y - z^2$, (b) $2xy + yz - xz$, (c) $x^2 + y^2 - y + z^2 + z$.

10. Najděte maximum a minimum následujících funkcí v osmistěnu $|x| + |y| + |z| \le 3$:
(a) $3x^2 + 3y + z^2$, (b) $2xy + yz - xz$, (c) $x^2 + 2xy + y^2 + z^2 - 2zx$.

14. a 22.5.2007

Matematická analýza 1b – 8. série

1. Nalezněte extrémy následujících funkcí na daných množinách:
(a) xy, $x + y = 1$, (b) xy, $x^2 + y^2 = 1$, (c) $x + 3y$, $x^2 + y^2 = 1$
(d) $x - y$, $2x^2 + y^2 = 9$ (e) $\cos^2 x + \cos^2 y$, $x - y = \pi/4$.

2. Nalezněte extrémy následujících funkcí na daným množinách:
(a) $x - 2y + z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, (b) xy^2z^3, $x + 2y + 4z = a$,
(c) $x + 3y$, $x^2 + y^2 = 1$ (d) $\sin x \sin y \sin z$, $x + y + z = \pi/2$,
(e) $xyz - 2x - 2y - 2z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x + y + z = 0$.

3. Nalezněte globální extrémy následujících funkcí na daných množinách:
(a) $x^2+3y^2-z^2$, $x^2+y^2+z^2 \le 100$, (b) $x^2+3y^2+5z^2$, $x^2+y^2 \le 4-|z|$,
(c) $x+3y-1$, $x^2+2xy+3y^2-2x \le 5$, (d) $x+2xy$, $x^2+y^2 \le 3$, $|x| \le 2$,
(e) $\frac{1}{|x|+|y|}$, $x^2+y^2-y=3/4$, (f) $(x+y+z)e^{-(x+2y+3z)}$, $x,y,z>0$,
(g) $x^2+3y^2+5z^2$, $x^2+y^2+z^2 \le 25$, $x+y+z \ge 0$,
(h) $\cos(x+y)\sin|x+y|$, $x^2+y^2 \le 5$, (i) $\ln(xy)\sqrt{1-\ln^2(xy)}$, $x+y \le 1$, $x,y \ge \frac{1}{\sqrt{e}}$,

4.
(a) Na kouli se středem 1 a poloměrem 1 najděte bod, který má nejmenší součet čtverců vzdáleností od n daných bodů $M_i=(1_i,b_i,c_i)$.
(b) Těleso sestává z válce zakončeného kuželem. Určete rozměry tělesa, víte-li, že má povrch S a maximální možný objem.
(c) Do daného kužele vepište kvádr s co největším objemem.
(d) Najděte vzdálenost paraboly $y=x^2$ od přímky $x-y-2=0$.
(e) Ukažte, že funkce $f(x,y)=(1+e^y)\cos x - ye^y$ má nekonečně mnoho lokálních maxim a ani jedno lokální minimum.
(f) Rozložte kladné číslo a na součet n kladných sčítanců tak, aby součet jejich druhých mocnin byl co nejmenší.
(g) Nahraďte funkci x^2 na intervalu $(1,3)$ lineární funkcí $ax+b$ tak, aby

$$\Delta := \sup\{|x^2-(ax+b)|, x \in (1,3)\}$$

bylo co nejmenší.

Výsledky 1. série

1. $o(x^k)$, $k=\min\{m,n\}$, $o(x^{n+k})$, $o(x^{m+n})$, $o(x^{m+n})$, $o(x^{mn})$, e^k, $1+o(1)$
2. (a) $\alpha<4$, (b) $\alpha<2m$, (c) $\alpha<3$, (d) $\alpha<4$, (e) $\alpha<2$, (f) $\alpha<2$ pro $k \ne 1$.
3. (a) $\sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!}(x-1)^k$, (b) $\sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k}(x-1)^k$, (c) $\sum_{k=0}^n \frac{\pi^{2k}}{(2k)!}(x-1)^{2k}(-1)^{k+1}$,
(d) $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}(x-1)^k$, (e) ?, (f) ?, (g) neexistuje, (h) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2^{1/2-k}(2k-1)!!}{2^k k!}(x-1)^k$
4. (a) $5x^3-2x+1$, (b) $1+x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$, (c) $x+x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5$, (d) $-2x+x^2+\frac{4}{3}x^3$, (e) $1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4$, (f) $x-\frac{1}{3}x^3$, (g) $1-\frac{x^4}{8}$, (h) $-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4$
5. (a) $1-\frac{1}{2}(x-\pi/2)^2$, (b) $-1+\frac{1}{2}(x-\pi)^2$, (c) $(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3$, (d) $e^{\sin 1}+e^{\sin 1}\cos 1(x-1)+e^{\sin 1}\left(-\frac{1}{2}\sin 1+\frac{1}{2}\cos^2 1\right)(x-1)^2+e^{\sin 1}\left(-\frac{1}{6}\cos 1-\frac{1}{2}\sin 1\cos 1+\frac{1}{6}\cos^3 1\right)(x-1)^3$.
6. (a) ?, (b) ?, (c) ?, (d) ?
7. (a) $-\frac{1}{6}$, (b) $\frac{1}{2}$, (c) $-\frac{1}{3}$ pro $p=3$, 0 pro $p<3$, (d) $+\infty$, (e) $\frac{1}{3}$ pro $p=3$, 0 pro $p<3$, (f) $-\frac{1}{2}$, (g) 0, (h) $-\frac{1}{3}$, (i) $\frac{1}{3}$, (j) $-\frac{1}{2}$, (k) $\frac{1}{3}$, (l) $-\frac{1}{12}$, (m) $\frac{19}{90}$, (n) $-\infty$, (o) neexistuje, (p) $-\frac{1}{180}$.

Výsledky 2. série

1. (a) $-x^3\cos x+3x^2\sin x-6x\cos x+6\sin x+c$, $x\in\mathbb{R}$, (b) $\sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}e^x+c$, $x\in\mathbb{R}$, (c) $x\ln x-x+c$, $x>0$, (d) $\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+c$, $x\in(0,+\infty)$, (e) $\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+c$,

$x \in \mathbb{R}$, (f) $\frac{1}{2}xe^x(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}e^x \cos x + c$, $x \in \mathbb{R}$, (g) $(-x^2/2 + x - 1/2)e^x \cos x + (x^2/2 - 1/2)e^x \sin x + c$, $x \in \mathbb{R}$, (h) $1/2xe^x \cos x + (1/2x - 1/2)e^x \sin x + c$, $x \in \mathbb{R}$.

2. (a) $x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + c$, $x > 0$, (b) (c) $\frac{1}{2}x - \frac{\cos 2x}{4} + c$, $x \in \mathbb{R}$, (d) $-\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x - \frac{3}{8}\sin x \cos x + \frac{3}{8}x + c$, $x \in \mathbb{R}$, (e) $\frac{5}{18}(3x+2)^{6/5} + c$, $x \in \mathbb{R}$, (f) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}(x^3) + c$, $x \in (\sqrt[3]{k\pi - \pi/2}, \sqrt[3]{k\pi + \pi/2})$, (g) $\ln\ln x + c$, $x \in (1, +\infty)$, (h) $\ln\ln\ln x + c$, $x \in (e, +\infty)$, (i) $\ln\cos x + c$, $x \in (2k\pi - \pi/2, 2k\pi + \pi/2)$, (j) $-\frac{1}{3}\sin^2 x \cos x - \frac{2}{3}\cos x + c$, $x \in \mathbb{R}$, (k) $\operatorname{tg} x - x + c$, $x \in (k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2)$, (l) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) + c$, $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$, (m) $-\frac{27}{49}\frac{1}{(x-3)^{49}} - \frac{9}{16}\frac{1}{(x-3)^{48}} - \frac{9}{47}\frac{1}{(x-3)^{47}} - \frac{1}{46}\frac{1}{(x-3)^{46}} + c$, $x \in (-\infty, 3), x \in (3, +\infty)$, (n) $2e^{\sqrt{x}}\sqrt{x} - 2e^{\sqrt{x}} + c$, $x > 0$, (o) $\sqrt{x^2+5} + c$, $x \in \mathbb{R}$, (p) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2) + c$, $x \in \mathbb{R}$.

3. (a) $\sin x + 4k + c$, $x \in (2k\pi - \pi/2, 2k\pi + \pi/2]$ a $-\sin x + 4k + 2 + c$, $x \in (2k\pi + \pi/2, 2k\pi + 3\pi/3]$, tj. existuje P.F. na celém $\mathbb{R}$, (b) $\frac{1}{4}x^3|x| + c$, $x \in \mathbb{R}$, (c) $\frac{1}{2}x|x| + c$, $x \in \mathbb{R}$, (d) $-\frac{1}{2}\cos(2x-1) + c$, $x \in (1/2, +\infty)$ a $\frac{1}{2}\cos(1-2x) - 1 + c$, $x \in (-\infty, 1/2]$, tj. existuje P.F. na celém $\mathbb{R}$, (e) $\frac{1}{2}(x - 2k\pi)^2 + c$, $x \in (2k\pi - \pi/2, 2k\pi + \pi/2]$, $\frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{2}(x - (2k+1)\pi)^2 + c$, $x \in (2k\pi + \pi/2, 2k\pi + 3\pi/2]$, (f) $-\frac{1}{2}e^{1-x^2} + c$, $x \in (-\infty, -1)$, $-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) - \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} + c$, $x \in [-1, 1]$, $-\frac{1}{2}e^{1-x^2} + c$, $x \in (1, +\infty)$ je pouze zobecněná primitivní funkce na $\mathbb{R}$.

4. Aplikujte per partes (vložení jedničky) na $\int \frac{1}{(1+x^2)^k}\, dx$.

5. (a) $-\frac{1}{8}\frac{1}{(2x+3)^4} + c$, $x \in (-\infty, -3/2), x \in (-3/2, +\infty)$, (b) $\frac{2\sqrt{39}}{39}\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{39}}{39}(4x+5)) + c$, $x \in \mathbb{R}$, (c) $-\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2-x+1)^2} + c$, $x \in \mathbb{R}$, (d) $\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c$, $x \in \mathbb{R}$, (e) $\frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{8}\frac{x}{x^2+1} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x + c$, $x \in \mathbb{R}$, (f) $\frac{1}{14}\frac{4x+1}{(2x^2+x+1)^2} + \frac{6}{49}\frac{4x+1}{2x^2+x+1} + \frac{48}{343}\sqrt{7}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{7}}{7}(4x+1)\right) + c$, $x \in \mathbb{R}$.

6. (a) $\ln(x^3 + 2x + 1) + c$, $x \in (x_1, +\infty)$, (b) $\ln\left(\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right) + c$, $x \in \mathbb{R}$, (c) $-\frac{1}{2}\cos(\ln^2 x) + c$, $x > 0$, (d) $2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + c$, $x > 0$.

Výsledky 3. série

1. (a) $\frac{2}{5}\ln|2x+3| + \frac{3}{5}\ln|3x+2| - \ln|x+1| + c$, $x \in (-\infty, -3/2)$, $(-3/2, -1)$, $(-1, -2/3)$, $(-2/3, +\infty)$, (b) $\frac{1}{64}\sqrt{2}\ln(\frac{x^2+2x\sqrt{2}+4}{x^2-2x\sqrt{2}+4}) + \frac{1}{32}\sqrt{2}\operatorname{arctg}(\frac{1}{2}x\sqrt{2}+1) + \frac{1}{32}\sqrt{2}\operatorname{arctg}(\frac{1}{2}x\sqrt{2}-1) + c$, $x \in \mathbb{R}$, (c) $\frac{5}{2}x^2 - 7x + 2\frac{1}{x+1} + 4\ln(x+1)^2 + c$, $x \in (-\infty, -1)$, $(-1, +\infty)$, (d) $\frac{25}{27}x^3 - \frac{50}{27}x^2 + \frac{130}{27}x - \frac{922}{243}\frac{1}{3x+2} - \frac{1160}{243}\ln|3x+2| + c$, $x \in (-\infty, -2/3)$, $(-2/3, +\infty)$, (e) $x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + c$, $x \in (-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$, (f) $\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 10x - 3\frac{1}{(x-1)^2} - 15\frac{1}{x-1} + 20\ln|x-1| + c$, $x \in (-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$.

2. (a) $\int \frac{(1+3u+u^2)u}{(1+u^2)^2+27}\, du$, $x \in (1/3, +\infty)$, (b) $-\frac{3}{2}\int \frac{(4y^2-(y^6-1)^2)y^5}{y^6-2y^3-1}\, dy$, $x \in (-1/2, 1+\sqrt{2})$, $(1+\sqrt{2}, +\infty)$, (c) $-\frac{3}{2}\int \frac{y^4+2y^3-2y+4}{y(y^3-2)}\, dy$, po dopočítání $\frac{-3}{2}\sqrt[3]{\frac{2x+2}{x-1}} + 3\ln|x^2-1| + c$, $x \in (-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$, (d) $\int \frac{2y^2}{(11y^4-30y^2+21)|2y^2-3|}\, dy$, $x \in (-\infty, -2/3), (-1/2, +\infty)$, (e) $\int \frac{y(y^2-2y+1)}{(2y^2-1)^2(y^2+1)}\, dy$, $x \in (1/2, +\infty)$, (f) $-2\int \frac{y(y^2-2)}{(y^2-1)^2(3y^2-y-4)}\, dy$, $x \in (-\infty, -2/7)$, $(-2/7, 1)$, $(2, +\infty)$.

3. (a) $\int \frac{(3\sqrt{5}y^2-3y-\sqrt{5})(\sqrt{5}y^2-3y+2-2y^2+\sqrt{5})}{(40y^2-12\sqrt{5}y-11)(3y^2-4\sqrt{5}y+3)}\,\mathrm{d}y$, na intervalech $(-\infty,-2/3)$ a $(-2/3,+\infty)$, (b) $\int \frac{2}{2y+1}\,\mathrm{d}y$, $x\in\mathbb{R}$, (c) $2\int \frac{(1+y^2+6y)(2+y^2+y)}{(1+2y)^3y}\,\mathrm{d}y$, $x\in(-\infty,-2)$, $(-2,+\infty)$, (d) $-2\int \frac{3y^2-y-1}{(8y^2-4y-3)y}\,\mathrm{d}y$, $x\in\mathbb{R}$, (e) $\frac{1}{2}\int \frac{(-3+3y^2-8y)(1+2y^2+y^4)}{(y^2(1+14y^2+y^4+4y-4y^3)}\,\mathrm{d}y$, $x\in\mathbb{R}$, (f) $\int \frac{(3y^2-y-1)y(5-8y-y^2+3y^3)}{(8y^2-4y-3)(4-2y^2+3y^4-4y)}\,\mathrm{d}y$, $x\in\mathbb{R}$.

4. (a) $\int \frac{y^3+y^2-5y+1}{y(y^4+1)}\,\mathrm{d}y$, $x\in\mathbb{R}$, (b) $\int \frac{y}{y^2+1}\,\mathrm{d}y$, $x\in(0,+\infty)$, (c) $\int \frac{e\cdot y^2}{y^2+1}\,\mathrm{d}y$, $x\in\mathbb{R}$.

5. (a) $-\int \frac{1}{(1-y^2)(2-y^2)}\,\mathrm{d}y$, $x\in(k\pi,(k+1)\pi)$, (b) $-\int \frac{1}{(1-y^2)^2+y^2}\,\mathrm{d}y$, $x\in\mathbb{R}$, (c) $\int \frac{1}{1-y^2}\,\mathrm{d}y$, $x\in(-\pi/2+k\pi,\pi/2+k\pi)$, (d) $\int \frac{2y^2+y+2}{y(y^2+1)(y+1)}\,\mathrm{d}y$, $x\in(k\pi,3\pi/4+k\pi)$, $(3\pi/4+k\pi,(k+1)\pi)$, (e) $-2\int -6y^2-5-2y+2y^5\,\mathrm{d}y$, $x\in\mathbb{R}$, (f) $-2\int \frac{y^2-3}{(3y^2+3+4y)(y^2+1)}\,\mathrm{d}y$, $x\in\mathbb{R}$.

6. (a) $-\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2(x/2)+\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}(x/2)+c$, $x\in(k\pi,(k+1)\pi)$, (b) $-\ln(\operatorname{tg}x+1)+\frac{1}{2}\ln(1+\operatorname{tg}^2x)+c$, $x\in(-\pi/4+k\pi,3\pi/4+k\pi)$, (c) $\operatorname{tg}x+\ln\operatorname{tg}x-2\ln(\operatorname{tg}x+1)+c$, $x\in(-\pi/4+k\pi,k\pi)$, $(k\pi,\pi/2+k\pi)$, $(\pi/2+k\pi,3\pi/4+k\pi)$, (d) ?, (e) $F(x)=\frac{\sqrt{6}}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\operatorname{tg}(x/2)\right)+\frac{\sqrt{6}}{6}\pi k+c$, $x\in(-\pi+2k\pi,\pi+2k\pi)$, $F(x)=\frac{\sqrt{6}}{12}\pi+\frac{\sqrt{6}}{6}\pi k+c$ pro $x=\pi+2k\pi$, (f) $-\frac{1}{3}\ln(\sin x-1)+\frac{1}{3}\ln(\sin x+1)-?+c$, $x\in(-\pi/2+k\pi,\pi/2+k\pi)$.

Výsledky 4. série

1. (a) $2/3\sqrt(3)\operatorname{arctg}(1/3(2\operatorname{tg}(\frac{e^x}{2}))+1)\sqrt(3))+\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}k+c$ na $I_k=(\ln(2k\pi-\pi),\ln(2k\pi+\pi))$, $I_0=(-\infty,\ln\pi)$ + spojitě dodefinovat. (b) $-\frac{1}{\operatorname{tg}(1/2x^2+1/2)+1}+c$ spojite dodefinovano v $\sqrt{\pi+2k\pi-1}$. Existuje na intervalech $(\sqrt{-\pi/2+2k\pi-1},\sqrt{3\pi/2+2k\pi-1})$, resp. $(0,\sqrt{3\pi/2-1})$, (c) $-\ln(\operatorname{tg}x-1)+1/2\ln(1+\operatorname{tg}^2x)+c$, $(-\pi/2+k\pi,\pi/4+k\pi)$, $(\pi/4+k\pi,\pi/2+k\pi)$, (d) ? , (e) $-2\ln(\sin x)+4\sqrt{\sin x+1}-4\operatorname{arctgh}(\sqrt{\sin x+1})$, na intervalech $(-\pi/2+2k\pi,3\pi/2+2k\pi)$ (f) $-\frac{2}{3}(cos^2x+5)^(3/2)$, $x\in\mathbb{R}$, (g) $\frac{1}{2}\sin(1/(x^2+1))(x^2+1)-\frac{1}{2}Ci(1/(x^2+1))$, $x\in\mathbb{R}$, (h) $\frac{1}{60}x^{1/4}(40x+10\sqrt{x}-15)\sqrt{\sqrt{x}+1}-1/4\operatorname{arcsinh}(x^{1/4})$, $x\in(0,+\infty)$.

2. (a) ?, (b) $-\frac{1}{2}x\cos^2x+\frac{1}{4}\cos x\sin x+\frac{1}{4}x$, $x\in\mathbb{R}$, (c) ?, (d) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}xx^3+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}xx^2-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}\ln(6x^2+6)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$, $x\in\mathbb{R}$, (e) ?

3. (a) $125\pi^3-30\pi$, (b) -1, (c) 1,

4. (a) $+\infty$, (b) $\frac{4}{3}$, (c) 3, (d) $\frac{1}{8}\ln 3$, (e) $+\infty$, (f) 0, (g) ?, (h) nelze, (i) ?, (j) $-\frac{2}{3}\sqrt{3}\cdot\operatorname{arctg}(1/3(2\operatorname{tg}(18\pi^2)+1)\sqrt{3})+\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(18\pi^2))+\frac{1}{9}\sqrt{3}\pi$, (k) $+\infty$, (l) $-\operatorname{arctgh}(\frac{1}{14}\sqrt{7})+\frac{1}{4}\sqrt{7}+\frac{1}{8}\ln 3+\frac{7}{8}\ln(5\sqrt{3}+2\sqrt{7}\sqrt{3})-4-\operatorname{arctgh}(\frac{1}{2}\sqrt{3})+\frac{7}{4}\sqrt{3}-\frac{7}{8}\ln(2-\sqrt{3})$, (m) ?

5. (a) 0, (b) per partes, (c) $+\infty$

Výsledky 5. série

1. (a) $y\geq x^2-4$ nebo $y\leq 4-x^2$, (b) $xy>0$ a $xy\neq 1$, 1. a 3. kvadrant bez grafu hyperboly, (c) $x\geq -y^2$ a $xy>1$, průnik oblastí vymezených hyperbolou a parabolou (d) $x>0$ a $y\geq 0$ nebo $y\leq -2x$, nebo $x<0$ a $y\leq 0$ nebo $y\geq -2x$, nebo $x=0$ a $y\neq 0$,

(e) $y \geq 1$ a $x \geq \sqrt{y-1}$, průnik poloroviny s prostorem napravo od paraboly, (f) $x,\, y \geq 0$ nebo $xy \leq 0$ a $x + y \geq 0$, 1. kvadrant a poloviny 2. a 4. kvadrantu

2. (a) kosočtverce se středem v počátku, (b) přímky se směrnicí 1/2, (c) elipsy, (d) hyperboly, (e) ?, (f) posunuté hyperboly

3. (a) neexistuje, není definována na okolí, (b) neexistuje, různé hodnoty z různých směrů, (c) neexistuje, není definována na okolí, (d) neexistuje, není definována na okolí, (e) neexistuje, různé hodnoty z různých směrů, (f) $\ln 2$, (g) $+\infty$, (h) není definována na okolí, (i) není definována na okolí

4. (a) nelze dodefinovat v 0, v ostatních bodech ano, (b) nelze, limita v 0 neexistuje, (c) lze dodefinovat nulou, (d) lze dodefinovat jedničkou, (e) nelze dodefinovat v nule ani v dalších bodech

5. (a) ano, (b) ne, (c) ano, (d) ano, (e) ne, jen pseudometrika, (f) ne, (g) ano, (h) ne, (i) ne, jen pseudometrika

6. (a) uzavřená, omezená, není otevřená, (b) omezená, není otevřená ani uzavřená, (c) omezená, není otevřená ani uzavřená, (d) otevřená, není uzavřená ani omezená, (e) není omezená ani otevřená ani uzavřená, (f) otevřená, není omezená ani uzavřená.

7. (a) neplatí, (b) neplatí.

Výsledky 6. série

1. (a) $f_x(0,0) = 0$, $f_x(0,1) = 0$, $f_x(1,1) = 2$, $f_y(0,0) = 0$, $f_y(0,1) = 2$, $f_y(1,1) = 2$, (b) neex., $-1/4$, $\sqrt{2}/18$, neex., $1/4$, $\sqrt{2}/18$, (c) 0, 1, $4 + 4\ln 2$, 0, 0, $4 + 4\ln 2$, (d) 0, 1, 0, 0, -1, 0, (e) 0, 0, $\cos 1 - \sin 1$, 0, 0, $\cos 1 - \sin 1$, (f) 0, neex., $2\ln 2 + 1$, 0, 0, $2\ln 2 + 1$, (g) 0, neex., $(\cos 1 - \sin 1)/2$, 0, $\cos 1 - \sin 1$, $(\cos 1 - \sin 1)/2$.

2. ve směru $(1,1)$ v bodě $(0,0)$: (a) 0, (b) neex., (c) 0, (d) neex., (e) 0, (f) 0, (g) 0. ve směru $(-1,2)$ v bodě $(1,1)$: (a) 0, (b) $\sqrt{2}/18$, (c) 0, (d) 0, (e) $\cos 1 - \sin 1$, (f) $2\ln 2 + 1$, (g) $(\cos 1 - \sin 1)/2$.

3.

4. (a) 0, $2dx$, $2dx + 2dy$, (b) neex., $1/4dx - 1/4dy$, ?, $\sqrt{2}/18dx + \sqrt{2}/18dy$, (c) 0, dy, $(4{+}4\ln 2)dx{+}(4{+}4\ln 2)dy$, (d) neex. , $-dx{+}dy$, 0, (e) 0, 0, $(\cos 1{-}\sin 1)dx{+}(\cos 1{-}\sin 1)dy$, (f) ?, (g) 0, neex., $(\cos 1 - \sin 1)/2dx + (\cos 1 - \sin 1)/2dy$.

5.

6. (a) $2(x + y)$, $2(x + y)$, (b) $(2x^2 + xy) \cdot 2x + (x^2 + 2xy) \cdot y$, $(2x^2 + xy) \cdot 0 + (x^2 + 2xy) \cdot x$, (c) $((x + y)(x^2 + 1) \cdot y + xy(x^2 + 1) \cdot 1 + xy(x + y) \cdot 2x, 1 \cdot y + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2x)$, $((x + y)(x^2 + 1) \cdot x + xy(x^2 + 1) \cdot 1 + xy(x + y) \cdot 0, 1 \cdot x + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0)$.

7. (a) 1,1, (b) 2,95, (c) 0,05, (d) 1

Výsledky 7. série

6. (a) $[-1,0]$, minimum, (b) nemá, (c) $[3/4,0]$ maximum, (d) $[-4/13, 19/13]$ není extrém, (e) $[0,0]$ není extrém, [?,?] minimum, (f) (g) (h) (i) minimum v $[1,1]$ a $[-1,-1]$, v $[0,0]$ sedlo

Výsledky 8. série

1. (a) maximum $1/4$ v $[1/2, 1/2]$, minimum neexistuje, (b) max. $1/2$ v $[\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}]$, min. $-1/2$ v $[\pm 1/\sqrt{2}, \mp 1/\sqrt{2}]$, (c) max. v $[3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10}]$, min. v $[-3/\sqrt{10}, -1/\sqrt{10}]$, (d) maximum $\sqrt{3/8}$ v $[1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}]$, minimum $-\sqrt{3/8}$ v $[-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}]$, (e) maximum v $[5\pi/8, 3\pi/8]$, maximum v $[\pi/8, -\pi/8]$,

2. (a) maximum v $[\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}]$, minimum v $[-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}]$, (b) glob. extr. neex., pokud a¿0, lok. minimum v $[a/6, a/6, a/8]$ a $[a-4z, 0, z]$, $z < a/4$, lok. maximum v $[a-4z, 0, z]$, $z > a/4$, (c) (d) max. v $[\pi/6, \pi/6, \pi/6]$, minimum v $[-pi/2, \pi/2, \pi/2]$, (e) minimum v $[\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}, -2\sqrt{3/2}]$, maximum v $[-\sqrt{3/2}, -\sqrt{3/2}, 2\sqrt{3/2}]$ + cyklická záměna.

3. (a) maximum v $[0, \pm 10, 0]$, minimum v $[0, 0, \pm 10]$, (b) minimum v $[0, 0, 0]$, maximum někde na povrchu, (c) minimum v $[\frac{3}{2}, -\frac{13}{3}\sqrt{3/26} - \frac{1}{2}]$, maximum v $[3/2, \frac{13}{3}\sqrt{3/26} - \frac{1}{2}]$, (d) ?, (e) ?, (f) ?, (g) ?, (h) minimum v $[x, -\pi/4 - x]$, $x \in [\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{8}\sqrt{-\pi^2 + 160}, \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{8}\sqrt{-\pi^2 + 160}]$, maxima v $[x, \pi/4 - x]$, $x \in [-\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{8}\sqrt{-\pi^2 + 160}, -\frac{1}{8}\pi + \frac{1}{8}\sqrt{-\pi^2 + 160}]$, (i) maximum v $[1/2, 1/2]$, minimum v $[x, e^{-1/\sqrt{2}}/x]$, $x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4e^{-1/\sqrt{2}}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4e^{-1/\sqrt{2}}}]$.

4. (a) $x = 1/N \sum a_i$, $y = 1/N \sum b_i$, $z = 1/N \sum c_i$, (b) (c) výška kvádru bude 1/3 výšky kužele. (d) $\frac{7}{4\sqrt{2}}$, (e) (f) všechny stejné (g) $4x - 7/2$.