16.10.2002

Cvičení 1

Vyšetřete konvergenci (absolutní konvergenci) následujících integrálů

1. $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$,
2. $\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$,
3. $\int_0^\infty \frac{x-\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$,
4. $\int_7^\infty \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
5. $\int_0^{\pi/2} \sin^p x \cos^q x\,\mathrm{d}x,\ p,\ q\in\mathbb{R}$,
6. $\int_0^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}\operatorname{arctg} x}{x}\,\mathrm{d}x$
7. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q},\ p,\ q\in\mathbb{R}$,
8. $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\operatorname{tg}^p x\,\mathrm{d}x$
9. $\int_0^\infty (\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}})x^{-a}\,\mathrm{d}x,\ a\in\mathbb{R}$,
10. $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
11. $\int_0^\infty x\cos^4 x\,\mathrm{d}x$,
12. $\int_0^\infty \frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x}^a\,\mathrm{d}x,\ a\in\mathbb{R}$
13.* $\int_1^\infty \sin(x+\ln x)x^p\,\mathrm{d}x,\ p\in\mathbb{R}$,
14.** $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^a\sin^2 x},\ a\in\mathbb{R}$
15. $\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x},\ p,\ q\in\mathbb{R}$,
16. $\int_2^\infty \frac{\sin x}{x+2\sin x}\,\mathrm{d}x$

23.10.2002

Cvičení 2 — 2. ročník

Vyšetřete konvergenci (absolutní konvergenci) následujících integrálů:

1. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$
2. $\int_0^\infty \sin x^2\,\mathrm{d}x$
3. $\int_0^\infty \frac{\sin\sqrt{x}}{x^a}\,\mathrm{d}x,\ a\in\mathbb{R}$
4. $\int_0^\infty x^a \sin x^b\,\mathrm{d}x,\ a,b\in\mathbb{R}$
5. $\int_0^\infty x^a \sin(\cos x)\,\mathrm{d}x$
6. $\int_0^\infty x^a \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$
7. $\int_0^\infty \frac{\sin x\sin 2x}{x^a}\,\mathrm{d}x$
8. $\int_0^\infty x^a \ln(1+x)\cos x\,\mathrm{d}x$
9. $\int_0^\infty \sin(\operatorname{arccotg} x)\sin x\,\mathrm{d}x$
10. $\int_{e+1}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$

30.10.2002

Cvičení 3 — 2. ročník

1. Délka křivky. Vypočtěte délku
a) grafu funkce $f(x)=2x,\ x\in[0,5]$.
b) grafu funkce $f(x)=x^{3/2},\ x\in[0,4]$.

c) grafu funkce $f(x) = e^x$, $x \in [0, a]$.

d) obvodu jednotkového kruhu

e) části Archimedovy spirály dané v polárních souřadnicích $r = a \cdot \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

f) křivky $x(t) = \sin^4 t$, $y(t) = \cos^4 t$

2. Výpočet integrálů.

a) Dokažte, že $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\ \mathrm{d}x = -\pi/2 \ln 2$. (návod: substituce $x = 2t$ a rozdělte na součet tří členů)

b) S pomocí předchozího vypočtěte $\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\ \mathrm{d}x$.

c) S pomocí předchozího vypočtěte $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}\ \mathrm{d}x$.

d) S pomocí předchozího vypočtěte $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x$.

e) Vypočtěte $I_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n x\ \mathrm{d}x$

3. Vypočtěte derivaci funkce $g(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2}\ \mathrm{d}t$.

4. Ukažte, že

$$\int_0^x e^{t^2}\ \mathrm{d}t \sim \frac{1}{x^2} e^{x^2},\ x \to \infty.$$

5. Úlohy s hvězdičkou

a) Dokažte Wallisův vzorec

$$\frac{\pi}{2} = \Pi_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Návod: využijte výsledku 2.e a nerovností $I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$.

b) Buď f nerostoucí spojitá funkce na $[1, +\infty)$ a nechť $\int_1^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$ konverguje. Pak $f(x) = o(1/x),\ x \to +\infty$.

6.11.2002

Cvičení 4 – 2. ročník

1. Stejnoměrná konvergence posloupností. Vyšetřete stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci:

$f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ na $(0,1)$, $\quad f_n(x) = x^{2n} - x^{3n}$ na $(0,1)$

$f_n(x) = 1/(x+n)$ na $(0,\infty)$, $\quad f_n(x) = nx/(1+n+x)$ na $(0,1)$

$f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n^2}$ na $\mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = n(\sqrt{x+1/n} - \sqrt{x})$ na $(0,\infty)$

$f_n(x) = (\sin nx)/n$ na $\mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \sin(x/n)$ na $\mathbb{R}$

$f_n(x) = x \operatorname{arctg}(nx)$ na $\mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = (1 + x/n)^n$ na $\mathbb{R}$

2. Stejnoměrná konvergence řad. Vyšetřete stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$ na $\mathbb{R}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n})$ na $\mathbb{R}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^3}$ na $\mathbb{R}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$ na $(0, \infty)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ na $(0, 2\pi)$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ na $(-1, \infty)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}$ na $(0, \infty)$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \operatorname{arctg} nx$ na $(0, 2\pi)$

3. Dokažte, že konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ pro $x = x_0$, pak konverguje na intervalu $[x_0, \infty)$ stejnoměrně.

13.11.2002

Cvičení 5 — 2. ročník

viz. sbírka

4.12.2002

1. Písemka

Čas na vypracování: 90 minut

1. (10 bodů) Rozhodněte, pro která $p \in \mathbb{R}$ jsou následující integrály konvergentní, resp. absolutně konvergentní:

$$\text{a)} \quad \int_0^1 x^p \sin\left(e^x\right)\, \mathrm{d}x, \qquad \text{b)} \quad \int_1^{\infty} x^p \sin\left(e^x\right)\, \mathrm{d}x.$$

2. (10 bodů) Pro která $p \in \mathbb{R}$ má křivka daná funkcí $f(x) = x^p \sin \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1]$ konečnou délku?

3. (10 bodů) Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) := n \left(\ln \left(x + \frac{1}{n} \right) - \ln x \right)$$

stejnoměrně, resp. lokálně stejnoměrně konvergentní na $(0, +\infty)$.

4. (10 bodů) Rozhodněte, zda je řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{x}}{1+nx}$$

stejnoměrně, resp. lokálně stejnoměrně konvergentní na $(0, +\infty)$.

5. (10 bodů) Rozhodněte, zda platí $\overline{A} = \overline{A^\circ}$ (uzávěr množiny A je roven uzávěru vnitřku množiny A). Každou z inkluzí dokažte, nebo nalezněte protipříklad.

Započítávají se čtyři nejlepší příklady, tj. maximální počet bodů je čtyřicet.

4.12.2002

1. Písemka

Čas na vypracování: 90 minut

1. (10 bodů) Rozhodněte, pro která $p \in \mathbb{R}$ jsou následující integrály konvergentní, resp. absolutně konvergentní:

$$\text{a)} \quad \int_0^1 x^p \sin\left(e^x\right) \, \mathrm{d}x, \qquad \text{b)} \quad \int_1^\infty x^p \sin\left(e^x\right) \, \mathrm{d}x.$$

2. (10 bodů) Pro která $p \in \mathbb{R}$ má křivka daná funkcí $f(x) = x^p \sin \frac{1}{x}$, $x \in (0,1]$ konečnou délku?

3. (10 bodů) Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) := n\left(\ln\left(x + \frac{1}{n}\right) - \ln x\right)$$

stejnoměrně, resp. lokálně stejnoměrně konvergentní na $(0, +\infty)$.

4. (10 bodů) Rozhodněte, zda je řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{x}}{1 + nx}$$

stejnoměrně, resp. lokálně stejnoměrně konvergentní na $(0, +\infty)$.

5. (10 bodů) Rozhodněte, zda platí $\overline{A} = \overline{A^\circ}$ (uzávěr množiny A je roven uzávěru vnitřku množiny A). Každou z inkluzí dokažte, nebo nalezněte protipříklad.

Započítávají se čtyři nejlepší příklady, tj. maximální počet bodů je čtyřicet.