15.10.2002

# Cvičení 1

**1.** Nakreslete grafy funkcí

a) $x$, $x^2$, $x^3$, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $|x|$

b) $x-2$, $|x-2|$, $||x-2|-1|$, $\frac{1}{x}$, $1+\frac{1}{x}$, $\frac{x-2}{x+5}$

c) $\sin x$, $\cos x$, $sin(2x)$, $\cos^2(x)$, $\frac{1}{2}(1+\cos(2x))$, $sin|x|$

d) $\operatorname{tg} x$, $x^2 \sin\frac{1}{x}$, $\frac{x+1}{x^2-x}$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arctg}(x+1)$

**2.** Řešte následující nerovnice (graficky)

a) $|x-2|<5$, $|1-|x-1||\geq|x-2|$

b) $x<\frac{2}{x}$, $x^2-1>3x$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}\geq\frac{2}{x+1}$

c) v komplexních číslech $|x-2|\leq 5$, $\operatorname{Re} x > 2|\operatorname{Im} x|$

**3.** Dokažte matematickou indukcí

a) $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

b) $n! > 2^n$ pro $n\geq 4$

c) $1+p+p^2+p^3+\cdots+p^n=\frac{1-p^{n+1}}{1-p}$

**4.** Dokažte sporem, že $\sqrt{2}$ je iracionální

**5.** Řešte v komplexních číslech

a) $x^2=i$

b) $(x-1)^3=8$

22.10.2002

# Cvičení 2

**1. Výroky.** Dokažte následující tvrzení:

a) $a\Rightarrow b$ je ekvivalentní s $\neg b\Rightarrow\neg a$ je ekvivalentní s $\neg(a\wedge\neg b)$.

b) $a\Rightarrow(b\Rightarrow c)$ je ekvivalentní s $\neg a\vee\neg b\vee c$

c) $(a\Rightarrow b)\Rightarrow c$ je ekvivalentní s $(a\wedge\neg b)\vee c$

d) $(a\wedge b)\Rightarrow(a\vee c)$

e) Pokud $(a\Rightarrow b)\wedge(b\Rightarrow c)$, pak $a\Rightarrow c$.

**2. Důkazy.** Dokažte:

a) Pokud $(a_1\Rightarrow a_2)\wedge(a_2\Rightarrow a_3)\ldots(a_{n-1}\Rightarrow a_n)$, pak $(a_1\Rightarrow a_n)$.

b) $\forall\ x, y > 0,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}&1 + \sqrt{xy} + \sqrt{x^2y^2} + \cdots + \sqrt{x^ny^n}\\ &\le \sqrt{1 + x + x^2 + \cdots + x^n}\sqrt{1 + y + y^2 + \cdots + y^n}.\end{aligned}$$

c) Je-li $a_1a_2a_3 > 8$, potom pro některé $i \in 1, 2, 3$ je $|a_i| > 2$.

d) Pro $x$, $y \in \mathbb{R}$ platí, že $xy^2/(y+1) \le 1/2$. Dokažte implikaci

$$x > 2 \Rightarrow y \le 3.$$

e) Víte, že rovnice $f(x+y) = f(x) + f(y), x, y \in \mathbb{R}; f(1) = 0$ má nejvýše jedno řešení omezené na $\langle 0, 1\rangle$. Dokažte, že potom také rovnice $f(x+y) = f(x) + f(y) + x^2 + y^2 + 1, x, y \in \mathbb{R}; f(1) = 5$ má nejvýše jedno řešení, které je omezené na $\langle 0, 1\rangle$.

**3. Kvantifikátory.**

a) Který z následujících výroků je silnější?

$$\forall\ x \in \mathbb{R}\ \exists\ K > 0;\ |f(x+1) - f(x)| \le K$$
$$\exists\ K > 0\ \forall\ x \in \mathbb{R};\ |f(x+1) - f(x)| \le K$$

Nalezněte příklady funkcí splňující resp. nesplňující tyto výroky. Znegujte.

b) Vyhovuje funkce $f(x) = \sin x$ následujícímu výroku nebo jeho negaci?

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ K > 0;\ \ (x > K \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$$

**4. Monotonie.**

a) Nechť $f$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f$ kladná, rostoucí, $g$ záporná, klesající. Jaké vlastnosti mají funkce $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $f/g$, $f \circ g$, $g \circ f$? Dokažte nebo najděte protipříklady.

b) Vyšetřete z hlediska monotonie funkce $x + \frac{1}{x}$; $\frac{x-2}{x+3}$; $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x$ bez použití derivací.

29.10.2002

# Cvičení 3 — 1. ročník

**1. Polynomy a odmocniny.** Spočtěte následující limity:

a) z definice $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}$

b) $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3}{x^2+x+2}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}$

c) $\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$, $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$, $\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

d)$\lim_{x\to7}\frac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt[3]{x+1}-2}$, $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x^2+1}}{x}$, $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x^m-a^m}$

**2. Síny a exponenciály.**

a) $\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$, $\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos x}$, $\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$, $\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$

b) $\lim_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$, $\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}$, $\lim_{x\to\pi/2}(x-\pi/2)\operatorname{tg}x$, $\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)}{x}$

c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $\lim_{x\to0}x\log x$

d) $\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{x^2}$, $\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin^2x}-\cos x}{x^2}$, $\lim_{x\to0}x^{(x^x)}$

**3. Teoretické úlohy**

a) Rozhodněte, platí-li: $\lim_{x\to a}f(x)=b$, právě když $\lim_{x\to a}|f(x)|=|b|$.

b) Existuje funkce, která nemá limitu v žádném bodě? (Uvažujte Dirichletovu funkci $D(x)=1$ pro $x$ racionální, $D(x)=0$ pro $x$ iracionální.)

c) Rozhodněte, v kterých bodech má limitu, resp. je spojitá Riemannova funkce $R(x)=1/q$ pro $x=p/q$, $p$, $q$ celá nesoudělná, $q>0$ a $R(x)=0$ jinak, tj. pro $x$ iracionální.

**4. Úlohy s hvězdičkou**

a) Uveďte příklad funkce, která je spojitá jen v jediném bodě.

b) Ukažte, že množina bodů, ve kterých má funkce $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ skok je nejvýše spočetná. (Řekneme, že $f$ má skok v bodě $a\in\mathbb{R}$, jestliže existují vlastní limity $\lim_{x\to a^-}f(x)=A$ a $\lim_{x\to a^+}f(x)=B$ a platí $A\neq B$.)

c) Ukažte, že pro libovolnou spočetnou množinu $M\subset\mathbb{R}$ existuje funkce $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, která má skoky právě v bodech množiny $M$.

5.11.2002

# Cvičení 4 – 1. ročník

**1.** Spočtěte následující limity:

$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin(\sin x))}{\cos(\pi/2\cos x)}$, $\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{(\pi/4-x)^3}$,

$\lim_{x\to\infty}(\cos\sqrt{x-1}-\cos\sqrt{x+1})$, $\lim_{x\to\pi/4}\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}(\pi/4-x)$,

$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2x}$, $\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos\alpha x)}{\ln(\cos\beta x)}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$, $\lim_{x\to+\infty} \ln(1+2^x)\ln(1+\frac{3}{x})$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2^x+x+1)}{\ln(x^{10}-x+1)}$, $\lim_{x\to+0} \left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)^{x^2}$

12.11.2002

# Cvičení 5 — 1. ročník

**1. Limity posloupností.** Spočtěte následující limity:

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-2}), \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n},$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^k},\ k\in\mathbb{N},$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}.$$

**2.** Ukažte, že existuje limita $\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n$

**3.** Ukažte, že $\lim q^n$ existuje, právě když $|q|<1$.

**4.** Dokažte ekvivalenci: $1/a_n \to 0 \ \Leftrightarrow\ |a_n|\to\infty$

**5.** Definujme posloupnost rekurentně rovnostmi $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

25.11.2002

# Cvičení 6 – 1. ročník

**1.** Spočtěte derivace následujících funkcí:

a) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\sin\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)$, $\cos(\ln x)$

b) $x^x$, $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$, $(\sin x)^{\cos x}$

c) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$, $\ln(\arccos x)$, $\arcsin(\sin x)$

d) $\operatorname{arctg}(e^x)-\ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$, $\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2-1})-\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$.

**2.** Vyšetřete spojitost a spočtěte derivaci funkce definované předpisem

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{\ln|x|}} & x\neq 0\\ 1 & x=0.\end{cases}$$

**3.** Pro která $a\in\mathbb{R}$ lze funkci $f(x)=x^a\sin(\ln x)\operatorname{arctg} x$ rozšířit na $\mathbb{R}$ tak, aby výsledná funkce

a) byla spojitá na $\mathbb{R}$
b) měla konečnou derivaci na $\mathbb{R}$.

**4.** Vyšetřete existenci asymptot v $+\infty$ a $-\infty$ funkce $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ a v $+\infty$ funkce $g(x) = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$.

3.12.2002

# 2. Písemka

Čas na vypracování: 30 minut

1. (3 body)

$$\lim_{x\to\pi/4} \frac{e^{\sin^2 x} - e^{\cos^2 x}}{x - \frac{\pi}{4}}$$

2. (3 body)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$$

3. (4 body)

$$\lim_{x\to 0} \left( \log(\sqrt{|x| + \sin x}) - \log(\sqrt{|2x|}) \right)$$

10.12.2002

# Cvičení 7 – 1. ročník

**1. Průběh funkce.** Vyšetřete průběh následujících funkcí (tj. nulovost, positivitu, lokální extrémy, monotonii, inflexní body, konvexnost, chování v $\pm$ nekonečnu a načrtněte graf):

a) $x^3 - 5x^2 + 5x - 1$, $x^3 + x^2 + x + 1$,
b) $\frac{2x}{1-x^2}$, $\frac{x^2+2}{x-1}$, $\frac{1}{x^2+x-2}$,
c) $\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$, $x\sqrt{1-x^2}$, $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1}$,
d) $x + \sin x$, $|\sin x| + \cos 2x$,
e) $\operatorname{arctg}(1-x^2)$, $\operatorname{arctg}(\frac{x+1}{x-1})$, $\arccos \frac{2x}{1+x^2}$, $\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$,
f) $e^x - x$, $e^{x^2+3x-7}$, $x^x$.

7.1.2003

# 3. Písemka

Čas na vypracování: 45 minut

Vyšetřete průběh následujících funkcí (definiční obor, průsečíky s osou x, lokální extrémy, inflexní body, intervaly, kde je funkce kladná, záporná, rostoucí, klesající, konvexní, konkávní, chování v $\pm\infty$):

1. (5 bodů)

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{5x-1}{2x+3}$$

2. (5 bodů)

$$g(x) = x + \sin 2x$$

13.1.2003

# Opravná písemka

Čas na vypracování: různý

1. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \to \pi/3} \frac{\sin x - \sqrt{3}\cos x}{e^{\operatorname{tg} x} - e^{\sqrt{3}}}$$

2. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \to 0} \cos\left(\frac{e^{|\sin x|} - 1}{x}\right)$$

3. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin(\frac{\pi}{4} + x) - \arcsin(\frac{\pi}{4} - x)}{x^p}$$

4. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{pro } |x| < 1 \\ (|x| - 1)^2 & \text{pro } |x| \geq 1 \end{cases}$$

5. Vyšetřete průběh funkce

$$g(x) = \arcsin\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{2}{\sqrt{1+x}}$$

6. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\frac{a^x + b^x + c^x}{3})}{x}$$

7. Nalezněte všechny přímky, které neprotínají graf funkce $x + e^x$.