18. a 20.2.2003

Cvičení 1 – 1. ročník

1. Určete počet nulových bodů funkce f v závislosti na parametrech a, $b \in \mathbb{R}$:
(a) $f(x) = 3x^2 + 2x + 3 - ax$, (b) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x - 2 - ax$,
(c) $f(x) = x + \frac{1}{x} - a$, (d) $f(x) = x^2 - ax - b$,
(e) $f(x) = \sin x + \cos x - a$, $D(f) = [0, 2\pi]$.

2. Určete počet stacionárních bodů a počet extrémů funkce f v závislosti na parametrech a, $b \in \mathbb{R}$:
(a) $f(x) = x^3 - ax$, (b) $f(x) = \sin x + ax$, $D(f) = [0, 2\pi]$,
(c) $f(x) = \sqrt[3]{x} - ax$, (d) $f(x) = x^3 + x^2 - ax - b$,
(e) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{1+x} - ax$, (f) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3x-1} - ax$.

3. Nalezněte inflexní body funkce f v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$:
(a) $f(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{x-a}{x}\right)$, (b) $f(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{ax-1}{x}\right)$.

4. Určete počet inflexních bodů funkce f v závislosti na parametru:
(a) $f(x) = \sqrt{x(a-x)} + x^2$, $a \in \mathbb{R}$,
(b) $f(x) = \sin(ax^2)$, $D(f) = [-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}]$, $a \in \mathbb{N}$

5. (a) Napište číslo $a > 0$ jako součet dvou nezáporných čísel takovým způsobem, aby součet p-tých mocnin těchto čísel byl co nejmenší ($p > 1$).

(b) Veďte bodem $[a, b]$ a, $b > 0$ přímku o záporné směrnici tak, aby trojúhelník ohraničený touto přímkou a osami x a y měl co nejmenší obsah.

6. Nalezněte lokální extrémy následujících funkcí v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$:
(a) $f(x) = 3|ax - 1| + 2|x|$, (b) $f(x) = |x - a| - 2|ax - 1|$,
(c) $f(x) = 3a|x - 1| - 2|ax - 1| - |x - a|$, (d) $f(x) = x^3 - a|x|$

25. a 27.2.2003

Cvičení 2 – 1. ročník

1. Vypočtěte Taylorův polynom n-tého stupně následujících funkcí v bodě $x_0 = 0$ a zapamatujte si:
(a) e^x, (b) $\sin x$, (c) $\cos x$, (d) $\log(1 + x)$

2. Vypočtěte Taylorův polynom třetího stupně následujících funkcí v bodě $x_0 = 0$:

(a) $\operatorname{tg} x$, (b) $\arcsin x$, (c) $\arccos x$, (d) $\sqrt{1+x}$
(e) $5x^3-2x+1$ (f) $\sin x+\cos x$ (g) $e^x\sin x$ (h) $\sin(x^2-2x)$
(i) $e^{\sin x}$ (j) $\sin\sin x$ (k) $\cos(\cos x-1)$ (l) $\log\cos x$

3. Vypočtěte Taylorův polynom třetího stupně následujících funkcí v daných bodech:
(a) $\sin x$ v bodě $\pi/2$ (b) $\cos x$ v bodě π
(c) x^3-2x+1 v bodě 1 (d) $e^{\sin x}$ v bodě 1

4. Pomocí Taylorova polynomu spočtěte následující limity:
(a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}$, (b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$
(c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-\arcsin x}{x^p}$, (d) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{\sin x-1+(x-\pi/2)^2}{(x-\pi/2)^4}$
(e) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x^p}$, (f) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\log x-(x-1)}{(x-1)^2}$
(g) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$, (h) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)$
(i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$, (j) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$
(k) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$, (l) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

5. Pomocí l'Hospitalova pravidla (či jinak) spočtěte následující limity
(a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}$, (b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3\operatorname{tg}4x-12\operatorname{tg}x}{3\sin4x-12\sin x}$
(c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\operatorname{cotg}x-1}{x^2}$, (d) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}$
(e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right)$, (f) $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}a}\right)^{\operatorname{cotg}(x-a)}$

4. a 6.3.2003

Cvičení 3 – 1. ročník

1. Vyjádřete uvedené primitivní funkce na maximálních intervalech pomocí elementárních funkcí:
(a) $\int x^3\sin x\ \mathrm{d}x$ (b) $\int x^ne^x\ \mathrm{d}x$ (c) $\int\ln x\ \mathrm{d}x$ (d) $\int x\ln x\ \mathrm{d}x$
(e) $\int\ln^2x\ \mathrm{d}x$ (f) $\int x^n\ln^m x$ (g) $\int\sin^2x\ \mathrm{d}x$ (h) $\int\sin^4x\ \mathrm{d}x$
(i) $\int\sqrt[5]{3x+2}\ \mathrm{d}x$ (j) $\int\frac{x^2}{\cos^2(x^3)}\ \mathrm{d}x$ (k) $\int\frac{1}{x\ln x}\ \mathrm{d}x$ (l) $\int\frac{1}{x\ln x\ln\ln x}\ \mathrm{d}x$
(m) $\int\operatorname{tg}x\ \mathrm{d}x$ (n) $\int\sin^3x\ \mathrm{d}x$ (o) $\int\operatorname{tg}^2x\ \mathrm{d}x$ (p) $\int\frac{1}{\sin x}\ \mathrm{d}x$
(q) $\int\frac{x^3}{(x-3)^{50}}\ \mathrm{d}x$ (r) $\int e^{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$ (s) $\int\frac{2}{2+3x^2}\ \mathrm{d}x$ (t) $\int\frac{1}{1+\cos x}\ \mathrm{d}x$
(u) $\int|\cos x|\ \mathrm{d}x$ (v) $\int\sqrt{x^6}\ \mathrm{d}x$ (w) $\int|x|\ \mathrm{d}x$ (x) $\int\sin|2x-1|\ \mathrm{d}x$

11. a 13.3.2003

Cvičení 4 – 1. ročník

1. Vypočtěte primitivní funkce na maximálních intervalech:

(a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+3)^5}$ (b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+5x+8)}$ (c) $\int \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^3}\,\mathrm{d}x$

(d) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$ (e) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3}$ (f) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+x+1)^3}$

2. Dokažte pro $k \in \mathbb{N}$: $\int \frac{1}{(x^2+1)^{k+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2k}\frac{x}{(x^2+1)^k} + \frac{2k-1}{2k}\int \frac{1}{(x^2+1)^k}\,\mathrm{d}x.$

3. Vypočtěte primitivní funkce rozložením na parciální zlomky:

(a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+3)(3x+2)(x+1)}$ (b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^4+16)}$ (c) $\int \frac{5x^3+3x^2-x-1}{(x^2+2x+1)}\,\mathrm{d}x$

(d) $\int \frac{(5x^2+1)^2+1}{(3x+2)^2}\,\mathrm{d}x$ (e) $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ (f) $\int \frac{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^3-3x^2+3x-1}\,\mathrm{d}x$

4. Převeďte na integrály z racionálních funkcí:

(a) $\int \frac{x+\sqrt{3x-1}}{2x^2+1}\,\mathrm{d}x$ (b) $\int \frac{x^2-\sqrt[3]{2x+1}}{x-\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x$ (c) $\int \frac{\sqrt{\frac{2x+2}{x-1}}+2x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$

(d) $\int \frac{\sqrt{5x^2+3x+1}+2x}{3x+2}\,\mathrm{d}x$ (e) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x$ (f) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\,\mathrm{d}x$

(g) $\int \frac{e^{3x}+e^{2x}-5e^x+1}{e^{4x}+1}\,\mathrm{d}x$ (h) $\int \frac{\ln x}{x(\ln^2 x+1)}\,\mathrm{d}x$ (i) $\int \frac{e^{2x+1}}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$

(j) $\int \frac{1}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$ (k) $\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ (l) $\int \frac{\sin^2 x+1}{\sin x\cos^2 x+\cos x+2}\,\mathrm{d}x$

18. 3. 2003

Písemka 1 — x52

Najděte primitivní funkce na celém $\mathbb{R}$:

1. (4 body)

$$\int e^{ax}\sin x\,\mathrm{d}x, \qquad a>0$$

2. (5 bodů)

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x$$

3. (6 bodů)

$$\int \frac{\sin x}{1+|\cos x|+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

20. 3. 2003

Písemka 1 — y60

Najděte primitivní funkce na celém $\mathbb{R}$:

1. (4 body)

$$\int \frac{\sin x}{\sin^2 x - 3}\ \mathrm{d}x$$

2. (5 bodů)

$$\int x \cos x e^x\ \mathrm{d}x$$

3. (6 bodů)

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{3 - \cos x}\ \mathrm{d}x$$

25. a 27. 3. 2003

Cvičení 5 – 1. ročník

1. Spočtěte následující integrály:

(a) $\int_0^3 2 - |x-2|\ \mathrm{d}x$,
(b) $\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\ \mathrm{d}x$,
(c) $\int_{-\sqrt{103}}^{\sqrt{103}} \operatorname{arctg} x\ \mathrm{d}x$,
(d) $\int_1^e \frac{1}{x \ln x}\ \mathrm{d}x$,
(e) $\int_{-1}^1 \sqrt{x^2+x+1}\ \mathrm{d}x$,
(f) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x + \cos x}\ \mathrm{d}x$,
(g) $\int_0^{3\pi} \frac{1}{3-\cos x}\ \mathrm{d}x$,
(h) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-2x\cos\alpha+1}\ \mathrm{d}x$, $\alpha \in (0,1)$,
(i) $\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\ \mathrm{d}x$,
(j) $\int_0^1 \arcsin x\ \mathrm{d}x$,
(k) $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$,
(l) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \arcsin(\operatorname{arctg} x)\ \mathrm{d}x$,
(m) $\int_1^2 \sqrt{-x^2+3x-2}\ \mathrm{d}x$,
(n) $\int_0^1 (x+1)\log\frac{x+\sqrt{x+1}}{x+2}\ \mathrm{d}x$,
(o) $\int_1^e \frac{1}{x} \operatorname{tg}^2 \sqrt{\log x^2+1}\ \mathrm{d}x$,
(p) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\ \mathrm{d}x$, $a > 0$,
(q) $\int_0^{\pi/2} \log\sin x\ \mathrm{d}x$ (subst. $x = 2t$)

2. Spočtěte plochy ohraničené následujícími křivkami případně grafy funkcí:
(a) $f(x) = \sin x$ a $g(x) = -\sin x$, $x \in [0,\pi]$,
(b) $f(x) = x^2$ a $g(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$
(c) $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$, $AC - B^2 > 0$

3. Spočtěte délky následujících křivek:
(a) $y = 5x$, $x \in [-1,2]$,
(b) $y = x^{3/2}$, $x \in [0,3]$,

(c) $y = e^x$, $x \in [-1, 1]$, (d) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\log x$, $x \in [1, e]$
(e) $x(t) = a(\cos t + t\sin t)$, $y(t) = a(\sin t - t\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$,
(f) $\phi = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})$, $r \in [1, 3]$.

1. a 3. 4. 2003

Cvičení 6 — 1. ročník

1. Vypočtěte následující integrály:
(a) $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\ \mathrm{d}x$ (subst. $x = 2t$) (b) $\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\ \mathrm{d}x$
(c) $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}\ \mathrm{d}x$ (d) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x$

2. Vypočtěte derivaci funkce $g(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2}\ \mathrm{d}t$.
Ukažte, že $\int_0^x e^{t^2}\ \mathrm{d}t \sim \frac{1}{2x}e^{x^2}$ pro $x \to \infty$ (tj. podíl funkcí jde k jedné).

3. Vyšetřete konvergenci (absolutní konvergenci) následujících integrálů:
(a) $\int_0^1 x^p\ \mathrm{d}x$, $p \in \mathbb{R}$, (b) $\int_1^\infty x^p\ \mathrm{d}x$, $p \in \mathbb{R}$
(c) $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\ \mathrm{d}x$, (d) $\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$,
(e) $\int_0^\infty \frac{x - \sin x}{x^p}\ \mathrm{d}x$, (f) $\int_7^\infty \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$
(g) $\int_0^{\pi/2} \sin^p x \cos^q x\ \mathrm{d}x$, p, $q \in \mathbb{R}$, (h) $\int_0^\infty \frac{1}{x^p + x^q}\ \mathrm{d}x$, p, $q \in \mathbb{R}$,
(i) $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) \operatorname{tg}^p x\ \mathrm{d}x$, (j) $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$
(k) $\int_0^\infty \frac{1}{1 + x^a \sin^2 x}\ \mathrm{d}x$, $a \in \mathbb{R}$, (l) $\int_2^\infty \frac{1}{x^p \ln^q x}\ \mathrm{d}x$, p, $q \in \mathbb{R}$,

4. Vyšetřete konvergenci (absolutní konvergenci) následujících integrálů:
(a) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x$ (b) $\int_0^\infty \sin x^2\ \mathrm{d}x$
(c) $\int_0^\infty \frac{\sin\sqrt{x}}{x^a}\ \mathrm{d}x$, $a \in \mathbb{R}$ (d) $\int_0^\infty x^a \sin x^b\ \mathrm{d}x$, $a, b \in \mathbb{R}$
(e) $\int_0^\infty x^a \sin(\cos x)\ \mathrm{d}x$ (f) $\int_0^\infty x^a \sin(\ln x)\ \mathrm{d}x$
(g) $\int_0^\infty \frac{\sin x \sin 2x}{x^a}\ \mathrm{d}x$ (h) $\int_0^\infty x^a \ln(1+x)\cos x\ \mathrm{d}x$
(i) $\int_0^\infty \sin(\operatorname{arccotg} x)\sin x\ \mathrm{d}x$ (j) $\int_2^\infty \frac{\sin x}{x + 2\sin x}\ \mathrm{d}x$
(k) $\int_0^\infty \frac{\sin(x + \frac{1}{x})^a}{x}\ \mathrm{d}x$, $a \in \mathbb{R}$ (l) $\int_1^\infty \sin(x + \ln x)x^p\ \mathrm{d}x$, $p \in \mathbb{R}$,
(m) $\int_0^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}\operatorname{arctg} x}{x}\ \mathrm{d}x$ (n) $\int_0^\infty (\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}})x^{-a}\ \mathrm{d}x$, $a \in \mathbb{R}$,

8. a 10. 4. 2003

Cvičení 7 — 1. ročník

1. Vyšetřete konvergenci (absolutní konvergenci) následujících integrálů:

(a) $\int_0^1 x^{\log x}\ \mathrm{d}x$ (b) $\int_0^1 x^{-\log x}\ \mathrm{d}x$
(c) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}\ \mathrm{d}x$ (d) $\int_0^1 \frac{1}{e^{\sqrt{x}}-1}\ \mathrm{d}x$
(e) $\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos x}{x^p}\ \mathrm{d}x$, $p \in \mathbb{R}$ (f) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin^p x(1-\sin^q x)}\ \mathrm{d}x$, $p, q > 0$
(g) $\int_1^{\infty} x^p \frac{x+\sin x}{x-\sin x}\ \mathrm{d}x$, $p \in \mathbb{R}$ (h) $\int_0^{\infty} x^{\alpha} \operatorname{arctg}^{\beta}(x)\ \mathrm{d}x$
(i) $\int_0^{\pi/2} x^{\alpha}(\frac{\pi}{2}-x)^{\beta} \operatorname{tg}^{\gamma} x\ \mathrm{d}x$ (j) $\int_0^{\infty} (\operatorname{arctg} x - \pi/2)^{\alpha} x^{\beta}\ \mathrm{d}x$

2. Vyšetřete konvergenci (absolutní konvergenci) následujících integrálů:
(a) $\int_0^{\infty} 2x\cos(x^4)\ \mathrm{d}x$ (b) $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\arcsin^2(\sin x)}{\sin x}\ \mathrm{d}x$
(c) $\int_1^{\infty} x^p \sin(x^3+x)\ \mathrm{d}x$ (d) $\int_1^{\infty} x^p \cos(e^x)\ \mathrm{d}x$
(e) $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x+\sin x}\ \mathrm{d}x$ (f) $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p+2\sin x}\ \mathrm{d}x$, $p > 0$

17. 4. 2003

Písemka 2 — y60

1. (4 body) Rozhodněte, pro která $p \in \mathbb{R}$ je následující integrál konvergentní resp. absolutně konvergentní:

$$\int_0^{\pi/2} \sin(\operatorname{tg} x) tg^p(x)\ \mathrm{d}x.$$

2. (5 bodů) Vypočtěte hodnotu integrálu

$$\int_{\log 10}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-3e^x+1}}\ \mathrm{d}x.$$

3. (6 bodů) Buď $f(x) = x^p \sin x^{-p}$ pro $0 < x \leq 1$ a $f(0) = 0$. Rozhodněte, pro která $p > 0$ je délka grafu funkce f konečná.

22. a 24. 4. 2003

Cvičení 8 — 1. ročník

1. Najděte a nakreslete všechna maximální řešení autonomních rovnic a poté řešení pro počáteční podmínku $y(0) = a$, $a \in \mathbb{R}$:
(a) $y' = y \ln y$ (b) $y' = \operatorname{tg} y$ (c) $y' = \operatorname{tg}^2 y$
(d) $y' = \sqrt[3]{y^2}$ (e) $yy' = 1 - y^2$ (f) $y' = 1 - y^2$

2. Najděte a nakreslete všechna maximální řešení následujících rovnic a poté řešení pro počáteční podmínku $y(0) = a$, $a \in \mathbb{R}$:

(a) $y' \sin x = y \ln y$ (b) $e^{2x+y} y' = 1$ (c) $yy' + xy^2 = x$

(d) $y' = \frac{x(1+y^2)}{1+x^2}$ (e) $yy' = \frac{(1-2x)}{y}$ (f) $e^{-y}(1 + y') = 1$

3. Najděte všechna maximální řešení následujících lineárních rovnic a poté řešení pro počáteční podmínku $y(0) = a$, $a \in \mathbb{R}$:

(a) $2y' + y = 0$ (b) $y' = y \cos x$ (c) $y' = y + \sin x$

(d) $y' = x^2 y + e^x$ (e) $y' = e^x y + e^{2x}$ (f) $y' = \operatorname{tg} x \cdot y + \sin x$

29. 4. 2003

Cvičení 9 — 1. ročník

1. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2 k}$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^{2k}}$ (e) $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\ln k}$ (f) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2} x^k$

(g) $\sum_{k=1}^{\infty} \sin^2 \frac{x}{\sqrt{k} \ln k}$ (h) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}{k^\alpha}$ (i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k^2}}{2^k}$

(j) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ (k) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ (l) $\sum_{k=1}^{\infty} \sin k$

2. Vyšetřete konvergenci (absolutní, neabsolutní) následujících řad:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^p$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt[k]{k}}{\ln k}$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k \sin k}{1+k^2}$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+(-1)^k}$ (e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k+\sqrt{k}}$ (f) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$

(g) $\sum_{k=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{k^2 + k})$ (h) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k! k^{-p}}{q(q+1)\dots(q+k)}$ (i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^k}{a^k k^2}$

(j) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2k+100}{3k+1}\right)^k$

6. 5. 2003

Písemka 3 — x52

1. (3 body) Rozhodněte, zda je následující řada absolutně konvergentní:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{(k+1)(k+2)\dots(k+k)}.$$

2. (6 bodů) Rozhodněte, pro která $z \in \mathbb{C}$ je následující řada absolutně konvergentní, neabsolutně konvergentní, divergentní:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(z-1)^{2k}(2i)^k}{\ln k}.$$

Nalezené množiny nakreslete.

3. (6 bodů) Najděte všechny funkce $y : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ splňující následující lineární rovnici a podmínku pro chování v okolí nuly:

$$xy' + 3y = 2x \sin x \qquad \text{a} \qquad \lim_{x \to 0} x^3 y(x) = 1.$$

15. 5. 2003

Písemka 3 — y60

1. (3 body) Rozhodněte, zda je následující řada absolutně konvergentní:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}{k^2+2k+3}.$$

2. (6 bodů) Rozhodněte (a podrobně zdůvodněte), pro která $p \in \mathbb{R}$ je následující řada absolutně konvergentní, neabsolutně konvergentní a divergentní:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{(-1)^k}{k^p}\right).$$

3. (6 bodů) Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' + yx = x^3$$

splňující počáteční podmínku $y(0) = 0$. Určete definiční obor řešení.

13. a 15.5. 2003

Cvičení 10 — 1. ročník

1. Určete poloměr konvergence a vyšetřete konvergenci na konvergenční kružnici:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} kz^k$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} i^k z^k$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{k} z^k$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} z^k$ (e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} z^k$ (f) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}+k^2} (2i+1)^k z^k$

(g) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$ (h) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$ (i) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$

2. Sečtěte následující řady na kruhu konvergence:

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} (3z)^k$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k(k+1)}$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k(k+2)}$ (e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$ (f) $\sum_{k=1}^{\infty} kz^k$