1. sada domácích úkolů z ODR

Příklad 1. (Autonomní rovnice) Uvažujte rovnici

$$x' = 2\sqrt{|x|} + e^x - 1.$$

(a) Vyšetřete existenci a jednoznačnost, speciálně (ne)napojování na stacionární řešení.

(b) Vyšetřete monotonii a konvexitu řešení.
[Klíčové je ukázat, že funkce $f(x) = 2\sqrt{|x|} + e^x - 1$ klesá pro $x < 0$. Abyste ukázali, že rozdíl jistých rostoucích funkcí je záporný, tak se hodí zkoumat jejich podíl.]

(c) Nastávají „blow-upy“ v $\pm\infty$?

(d) Načrtněte reprezentativní řešení do roviny (t, x).

Příklad 2. (Neautonomní rovnice) Uvažujte rovnici

$$x' = tx^3 + t^3x.$$

(a) Načrtněte řešení rovnice do roviny (t, x), včetně monotonie a konvexity.

(b) Buď y řešení rovnice s počátečníí podmínkou $x(0) = 1$. Dokažte, že pro všechna $t > 0$ je $y' > ty^3$.

(c) S pomocí (b) ukažte „blow-up“ řešení y a odhadněte shora čas, kde k němu dojde,

Příklad 3. (Nelineární systém) Uvažujte systém

$$\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= x^2 - y^2. \end{aligned}$$

(a) Vypočtěte první integrál.

(b) Do roviny (x, y) načrtněte trajektorie řešení a vyznačte směry probíhání.

(c) Pomocí první rovnice rozhodněte, zda může nastat „blow-up“ pro $x \to +\infty$.

Příklad 4. (Derivace podle počáteční podmínky) Buď $\phi(t, \mu, \lambda)$ řešící funkce rovnice

$$\begin{aligned} x' &= x^2 + \lambda\mu x, \\ x(0) &= \mu. \end{aligned}$$

(a) Napište rovnici ve variacích pro $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\mu}$ v bodě $(t, 2, 0)$.

(b) Vypočtěte $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\mu}(t, 2, 0)$.

(c) Vypočtěte $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda}(t, 2, 0)$.

Příklad 5. (Derivace podle počáteční podmínky) Buď $\phi(t, \mu, \lambda)$ řešící funkce soustavy

$$\begin{aligned} x' &= x\cos y + y\sin x, \\ y' &= y + x, \\ x(0) &= \mu, \\ y(0) &= \lambda. \end{aligned}$$

(a) Vypočtěte $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda}(t, 0, 0)$.

(b) Vypočtěte $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\mu}(t, 0, 0)$.

(c) Napište přibližnou hodnotu $\phi(10, \mu, \lambda)$ a chybu pomocí malého o.