

1. Lokální existence řešení

MOTIVACE

Úmluva. Budeme studovat systém rovnic

$$x' = f(t, x) \quad (\text{DR})$$

za trvalého předpokladu $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ spojitá.

Definice. Buď I otevřený interval. Funkci $x(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazveme *řešením* (DR) v Ω , jestliže pro všechna $t \in I$ platí

- (i) $(t, x(t)) \in \Omega$
- (ii) existuje vlastní $x'(t)$ a
- (iii) $x'(t) = f(t, x(t))$.

Poznámka. Budeme-li chtít zdůraznit definiční obor řešení, budeme hovořit o řešení (x, I) .

Poznámka. 1. Takto definované řešení je nutně C^1 („klasické řešení“).

2. Platí princip „nalepování“: je-li $x(t)$ řešení na (a, t_0) a na (t_0, b) , spojitě v $t = t_0$, pak je již řešení na (a, b) .

Lemma 1 (O integrální formulaci). *Nechť I je otevřený interval, $x(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ spojitá funkce splňující $(t, x(t)) \in \Omega$ pro každé $t \in I$ a nechť $t_0 \in I$.*

Potom je ekvivalentní

- (i) x je řešení (DR), splňující $x(t_0) = x_0$,
- (ii) pro každé $t \in I$ platí $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds$.

Věta 2 (Peano). *Nechť $(t_0, x_0) \in \Omega$. Pak existuje $\delta > 0$ a funkce $x(t) : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$, která je řešením (DR) a splňuje $x(t_0) = x_0$.*

Věta 3 (Arzela-Ascoli). *Nechť funkce $x_n(t)$ jsou stejně omezené a stejně spojitě na $[0, T]$. Potom z nich lze vybrat stejnoměrně konvergující podposloupnost.*

Definice. Řekneme, že funkce množiny $M \subset C(K, \mathbb{R}^n)$ jsou

- 1. *stejně spojitě*, jestliže pro každé $x \in K$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ pro všechna $y \in (x - \delta, x + \delta)$ a všechny $f \in M$.
- 2. *stejně omezené*, jestliže existuje $C > 0$ takové, že $\|f(x)\| \leq C$ pro všechna $x \in K$ a všechny $f \in M$.

Poznámka. Obecnější formulace A-A věty: Buď K kompaktní množina a $M \subset C(K, \mathbb{R}^n)$ omezená množina stejně spojitých funkcí. Pak M je relativně kompaktní v $C(K, \mathbb{R}^n)$.

Poznámka. Důkaz A-A věty lze najít např. v Vrabie: Differential Equations (Theorem 8.2.1) nebo ve skriptech k MA (Věta 13.4.6)

Poznámka. Důkaz existence řešení diferenciální rovnice často pracuje s řešeními pozměněné rovnice, které konvergují k něčemu, o čem se ukáže, že je to řešení původní rovnice. Často také využívají věty o pevných bodech (Banachova, Browerova, ...).

Poznámka. Je-li f spojitá a omezená v $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$, pak řešení existuje dokonce *globálně*, tj. pro $t \in \mathbb{R}$. Příklad rovnice $x' = \exp(x)$, $x(0) = 2$, jejíž (jediné) řešení $x(t) = \ln(1/(e^{-2} - t))$ nelze pokračovat za $t = e^{-2}$, ukazuje, že obecně je existence zaručena pouze *lokálně*.

2. Jednoznačnost řešení

Definice. Řekneme, že rovnice (DR) má v Ω vlastnost

1. *globální jednoznačnosti*, jestliže pro libovolná řešení (x, I) , (y, J) , splňující $x(t_0) = y(t_0)$ pro nějaké $t_0 \in I \cap J$, platí $x(t) = y(t)$ pro všechna $t \in I \cap J$.
2. *lokální jednoznačnosti*, jestliže pro libovolná řešení (x, I) , (y, J) , splňující $x(t_0) = y(t_0)$ pro nějaké $t_0 \in I \cap J$, existuje $\delta > 0$ tak že $x(t) = y(t)$ pro všechna $t \in I \cap J \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Věta 4. *Rovnice (DR) má v Ω vlastnost globální jednoznačnosti, právě když zde má vlastnost lokální jednoznačnosti.*

Definice. Funkce f se nazývá *lokálně lipschitzovská* vzhledem k x v Ω , jestliže pro každé $(t_0, x_0) \in \Omega$ existují L a $\delta > 0$ tak, že

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$$

pro všechna $(t, x), (t, y) \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times U(x_0, \delta)$.

Věta 5. *Nechť f je lokálně lipschitzovská vzhledem k x v Ω . Potom rovnice (DR) má v Ω vlastnost lokální jednoznačnosti.*

Definice. $f \in C_x^1(\Omega)$ značí, že $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existují a jsou spojité v Ω , pro každé i .

Lemma 6. *Nechť $f \in C_x^1(\Omega)$. Potom f je lokálně lipschitzovská vzhledem k x v Ω .*

Důsledek 7. *Nechť $f \in C_x^1(\Omega)$. Potom rovnice (DR) má v Ω vlastnost globální jednoznačnosti.*

3. Maximální řešení

Definice. Řešení $(\hat{x}, \hat{I})$ se nazve *prodloužením* řešení (x, I) , jestliže $\hat{I} \supset I$ a $\hat{x}(t) = x(t)$ pro každé $t \in I$.
Řešení (x, I) se nazve *maximální*, jestliže nemá žádné netriviální (tj. $\hat{I} \supsetneq I$) prodloužení.

Věta 8. Každé řešení má alespoň jedno maximální prodloužení.

Věta 9 (Picard). Nechť $f \in C_x^1(\Omega)$. Pak pro každé $(t_0, x_0) \in \Omega$ existuje právě jedno maximální řešení x (DR) v Ω splňující $x(t_0) = x_0$.

Lemma 10. Řešení (x, I) , kde $I = (a, b)$, lze prodloužit za bod b , právě když platí

(i) $b < \infty$

(ii) existuje $\lim_{t \rightarrow b-} x(t) =: x_0 \in \mathbb{R}^n$ a

(iii) $(b, x_0) \in \Omega$.

Věta 11 (O opuštění kompaktu). Nechť $K \subset \Omega$ je kompaktní množina, nechť (x, I) je maximální řešení, splňující $(t_0, x(t_0)) \in K$. Potom existují $t_1 > t_0$ a $t_2 < t_0$ taková, že $(t_1, x(t_1)) \notin K$ a $(t_2, x(t_2)) \notin K$.

4. Závislost na počáteční podmínce

Věta 12 (Gronwallovo lemma). *Nechť $w(t)$, $g(t)$ jsou nezáporné, spojitě na intervalu I , nechť $t_0 \in I$, $K \geq 0$. Nechť pro každé $t \in I$*

$$w(t) \leq K + \left| \int_{t_0}^t w(s)g(s)ds \right|$$

Potom pro každé $t \in I$

$$w(t) \leq K \exp \left(\left| \int_{t_0}^t g(s)ds \right| \right)$$

Lemma 13. *Nechť f je (globálně) L -lipschitzovská v Ω vzhledem k x . Potom pro libovolná dvě řešení (x, I) , (y, J) v Ω a body $t, t_0 \in I \cap J$ platí*

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(t_0) - y(t_0)| \exp(L|t - t_0|)$$

Definice. Nechť f je spojitá a lokálně lipschitzovská vzhledem k x v Ω . Potom definujeme *řešící funkci* $\varphi : G \subset \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^n$ předpisem $\varphi(t, t_0, x_0) = x(t)$, kde $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ je maximální řešení rovnice (DR) v Ω s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$ a $t \in I$. Zde G je maximální možná, tj. obsahuje všechny trojice $(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+2}$, pro něž $\varphi(t, t_0, x_0)$ má smysl.

Věta 14. *Nechť f je spojitá a lokálně lipschitzovská vzhledem k x v Ω . Množina G z předchozí definice je otevřená a φ je spojitá na G .*

Důsledek 15. *Je-li $f = f(t, x, p)$ spojitá a navíc lokálně lipschitzovská vůči x a parametru p , závisí řešení $x' = f(t, x, p)$, $x(t_0) = x_0$ spojitě i na parametru p .*

Označme pro účely následující věty $\frac{\partial}{\partial w}$ derivaci ve směru $w \in \mathbb{R}^n$ dle proměnné x_0 .

Věta 16. *Nechť $f \in C_x^1(\Omega)$, $w \in \mathbb{R}^n$. Potom $\frac{\partial \varphi}{\partial w}(t, t_0, x_0)$ existuje v každém bodě G . Označíme-li $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$ a $u(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial w}(t, t_0, x_0)$, pak funkce u je řešením „rovnice ve variacích“*

$$u' = \nabla_x f(t, x(t))u, \quad u(t_0) = w \tag{1}$$

Poznámka. Za uvedených předpokladů dokonce $\frac{\partial \varphi}{\partial w}(t, t_0, x_0)$ závisí spojitě na x_0 , tj. řešící funkce je diferencovatelná (má totální diferenciál) vzhledem k x_0 . Lze též ukázat, že φ je diferencovatelná vůči t a t_0 .

Poznámka. 1. Je-li $f \in C_x^k$, je $\varphi \in C_{x_0}^k$.

2. Za příslušných předpokladů je řešící funkce diferencovatelná též vůči parametru p .

5. Lineární rovnice

Definice. *Lineární rovnici* rozumíme

$$x' = A(t)x + g(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2)$$

kde $A(t) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $g(t) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsou spojité.

Definice. *Normu matice* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definujeme

$$\|A\| = \sup \{|Ax|; x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1\},$$

kde $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ je norma vektoru $x \in \mathbb{R}^n$.

Věta 17 (Vlastnosti normy matice). *Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Potom :*

- (i) $\|A\| \geq 0$, a $\|A\| = 0$ právě když $A = 0$
- (ii) $\|aA\| = |a| \|A\|$ pro $\forall a \in \mathbb{R}$
- (iii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- (iv) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$
- (v) $|Ax| \leq \|A\| |x|$ pro $\forall x \in \mathbb{R}^n$
- (vi) je-li A regulární, pak $|Ay| \geq |y| / \|A^{-1}\|$ pro $\forall y \in \mathbb{R}^n$

Poznámka. Lze zavést jiné (nutně ekvivalentní) normy matice, např.

$$\|A\|_\infty = \max\{|A_{ij}|; 1 \leq i, j \leq n\}$$

kde A_{ij} značí prvek ij matice A . Výhoda výše uvedené normy je ve vlastnostech (iv-vi) Věty 6.1, které např. pro normu $\|A\|_\infty$ neplatí (resp. platí až na vhodnou konstantu).

Často (a mlčky) užívaná úvaha : $A_n \rightarrow A$ v normě, právě když $A_{nij} \rightarrow A_{ij}$ pro každé ij . Podobně (tj. po složkách) lze ekvivalentně nahlížet na další „limitní“ operace maticových funkcí (derivace, integrál, součet řady).

Věta 18. *Nechť $t_0 \in (a, b)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ je dáno. Pak existuje jediné řešení rovnice (2), definované na celém (a, b) .*

Poznámka. Podstatný rys lineárních rovnic: *globální* existence řešení, tj. na oboru spojitosti $A(t), g(t)$. Ve skutečnosti platí i pro nelineární rovnice $x' = f(x, t)$ se sublineární pravou stranou, tj. pokud $|f(x, t)| \leq a(t)|x| + g(t)$, kde $a(\cdot), g(\cdot)$ jsou spojité.

Definice. *Homogenní rovnici* rozumíme (2) pro $g(t) \equiv 0$, tj.

$$x' = A(t)x, \quad x(t_0) = x_0 \quad (3)$$

Věta 19. *Množina $\mathcal{R}_H$ řešení homogenní rovnice (3) tvoří n -dimenzionální podprostor $C^1((a, b), \mathbb{R}^n)$.*

Definice. *Fundamentálním systémem* pro (3) rozumíme libovolnou bázi $\mathcal{R}_H$. Matice, jejíž sloupce tvoří prvky libovolného fundamentálního systému, nazýváme *fundamentální maticí* pro (3).

Poznámka. Je-li $\Phi(t)$ nějaká fundamentální matice pak:

- $\Phi(t)$ splňuje „maticový tvar (3)“, tj. $\Phi' = A(t)\Phi$
- $\Phi(t)$ je regulární pro každé $t \in (a, b)$
- obecné řešení (3) má tvar $\Phi(t)c$, kde $c \in \mathbb{R}^n$ (sloupcový vektor)
- $\tilde{\Phi}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$ je také fundamentální matice navíc splňující $\tilde{\Phi}(t_0) = I$.

Věta 20 (Variace konstant). *Nechť $\Phi(t)$ je libovolná fundamentální matice pro (3). Potom řešení rovnice (2) lze napsat ve tvaru*

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)g(s)ds, \quad t \in (a, b).$$

Definice. *Wronského determinant (Wronskián) rovnice (3) je funkce $w(t) = \det(\Phi(t))$, kde Φ je (libovolná) fundamentální matice rovnice (3).*

Věta 21 (Liouvilleova formule). *Nechť $\Phi(t)$ je maticové řešení (3), nechť $w(t) = \det \Phi(t)$. Potom*

$$w(t) = w(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s)ds \right)$$

kde $\operatorname{tr} A$ je stopa matice A .

6. Lineární rovnice s konstantními koeficienty

Lineární homogenní rovnice s konstantními koeficienty a s maticí $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je

$$x' = Ax, \quad (\text{HRK})$$

Definice. Maticovou exponenciálu definujeme předpisem $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ (s konvencí $A^0 = I$).

Poznámka. Řada konverguje absolutně a platí $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$.

Věta 22. Nechť $U(t) = e^{tA}$. Pak $U(t)$ je fundamentální matice rovnice (HRK) a platí $U(0) = I$.

Věta 23 (Vlastnosti maticové exponenciály). (i) $e^{aI} = e^a I$ pro $\forall a \in \mathbb{R}$

(ii) pokud $AB = BA$, pak $e^{A+B} = e^A e^B$

(iii) $e^{C^{-1}AC} = C^{-1}e^A C$

(iv) $e^{-A} = (e^A)^{-1}$; speciálně e^A je vždy regulární

Důsledek 24 (Variace konstant pro (4)). Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $g(t) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá, $t_0 \in (a, b)$ a $x_0 \in \mathbb{R}^n$ jsou dána. Potom řešení rovnice

$$x' = Ax + g(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (4)$$

má tvar

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} g(s) ds, \quad t \in (a, b)$$

Věta 25 (Výpočet maticové exponenciály). Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, J je její Jordanův kanonický tvar, $A = VJV^{-1}$ a $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ je diagonála J . Potom $e^{tA} = Ve^{tJ}V^{-1}$, kde $e^{tJ} = \text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n})P(t)$, přičemž $P(t)$ je blokově diagonální matice se stejně velkými a stejně uspořádanými bloky jako J a blok velikosti k matice $P(t)$ je roven

$$\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \dots & \frac{1}{(k-1)!}t^{k-1} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{1}{(k-2)!}t^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Důsledek 26. Bud' $a = \max\{\Re \lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$ a m velikost největší Jordanovy buňky příslušné k vlastnímu číslu s $\Re \lambda = a$. Pak existuje $M > 0$, že $\|e^{tA}\| \leq Mt^{m-1}e^{at}$ pro všechna $t \geq 0$. Speciálně pro všechna $\tilde{a} > a$ existuje $\tilde{M} > 0$, že $\|e^{tA}\| \leq \tilde{M}e^{\tilde{a}t}$ pro všechna $t \geq 0$.

Definice. Pro matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a její spektrum $\sigma(A)$ definujeme $\sigma_-(A) = \sigma(A) \cap \{\Re < 0\}$, $\sigma_0(A) = \sigma(A) \cap \{\Re = 0\}$, $\sigma_+(A) = \sigma(A) \cap \{\Re > 0\}$. Prostory generované příslušnými (zobecněnými) vlastními vektory značíme $X_-(A)$, $X_+(A)$, $X_0(A)$ (nazýváme je *stabilní*, *nestabilní* a *centrální podprostor*).

Poznámka. Zřejmě $\mathbb{R}^n = X_-(A) \oplus X_+(A) \oplus X_0(A)$. Tyto prostory jsou invariantní vzhledem k A a též vzhledem k e^{tA} .

Věta 27 (Asymptotické chování řešení (HRK)). Nechť A je daná matice. Potom existují α , β , M a $c > 0$ takové, že platí:

1. (stabilní podprostor) $x_0 \in X_-(A) \implies |e^{tA}x_0| \leq ce^{-\alpha t}|x_0|$ pro každé $t \geq 0$
2. (nestabilní podprostor) $x_0 \in X_+(A) \implies |e^{tA}x_0| \leq ce^{\beta t}|x_0|$ pro každé $t \leq 0$
3. (centrální podprostor) $x_0 \in X_0(A) \implies |e^{tA}x_0| \leq c(1+|t|)^M|x_0|$ pro každé $t \in \mathbb{R}$

Poznámka. Uvedené vlastnosti prostory $X_-(A)$, $X_+(A)$ a $X_0(A)$ charakterizují, tj. platí i opačné implikace.

7. Stabilita

MOTIVACE Lemma 13 *teoreticky* tvrdí spojitost řešení vůči x_0 , *prakticky* však (pro větší t) nemá vzhledem k exponenciálnímu odhadu význam. To nás vede ke zkoumání okolností, za nichž existují odhady, které se nezhoršují pro $t \rightarrow \infty$.

Definice. Nechť $f = f(x, t)$ je spojitá v otevřené $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a navíc lokálně lipschitzovská vůči x . Nechť $\Omega \supset \{0\} \times I$, kde $I = (\tau, \infty)$, a nechť $f(0, t) = 0$ pro $\forall t \in I$.

Řekneme, že nulové řešení rovnice je

- (i) *stabilní*, jestliže $\forall t_0 \in I \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že $|x_0| < \delta$ implikuje, že $\varphi(t, t_0, x_0)$ je definováno a splňuje $|\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$ pro $\forall t \geq t_0$
- (ii) *nestabilní*, jestliže není stabilní
- (iii) *lokální atraktor*, jestliže $\forall t_0 \in I \exists \eta > 0$ tak, že $|x_0| < \eta$ implikuje, že $\varphi(t, t_0, x_0)$ je definováno $\forall t \geq t_0$ a navíc $\varphi(t, t_0, x_0) \rightarrow 0$ pro $t \rightarrow +\infty$
- (iv) *asymptoticky stabilní*, jestliže je stabilní a navíc lokální atraktor

Definice. (v) *uniformně stabilní*, jestliže $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t_0 \in I$ tak, že $|x_0| < \delta$ implikuje, že $\varphi(t, t_0, x_0)$ je definováno a splňuje $|\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$ pro $\forall t \geq t_0$

- (vi) *uniformně asymptoticky stabilní*, jestliže je uniformně stabilní a navíc $\exists \eta > 0 \forall \varepsilon > 0 \exists T > 0 \forall t_0 \in I$ $|x_0| < \eta$ implikuje, že $\varphi(t, t_0, x_0)$ je definováno pro všechna $t \geq t_0$ a $|\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$ pro $\forall t \geq t_0 + T$

Poznámka. V případě autonomní rovnice však je (asymptotická) stabilita totéž co (asymptotická) uniformní stabilita, neboť $\varphi(t, t_0, x_0) = \varphi(t - t_0, 0, x_0)$.

Poznámka. 1. (iii) obecně neimplikuje (i) – Vinogradovův protipříklad.

2. Obecněji, řešení $\tilde{x}(t)$ rovnice $x' = f(x, t)$ se nazve stabilní (resp. uniformně stabilní, atd.), jestliže má analogickou vlastnost nulové řešení rovnice $u' = g(u, t)$, kde $g(u, t) = f(\tilde{x}(t) + u, t) - f(\tilde{x}(t), t)$.

3. V případě lineární rovnice (2), tj.

$$x' = A(t)x + g(t)$$

je stabilita (libovolného) řešení ekvivalentní stabilitě nulového řešení příslušné homogenní úlohy, tj. (2).

Věta 28. Je dána rovnice $x' = A(t)x$, kde $A(t)$ je spojitá v $I = (\tau, \infty)$. Nechť $\Phi(t)$ je (libovolná) fundamentální matice. Potom nulové řešení je

- 1. *stabilní*, právě když pro $\forall t_0 \in I$ je $\|\Phi(t)\|$ omezená v $[t_0, \infty)$
- 2. *asymptoticky stabilní*, právě když $\|\Phi(t)\| \rightarrow 0$ pro $t \rightarrow \infty$
- 3. *uniformně stabilní*, právě když $\exists c > 0 \forall s < t \in I$ je $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \leq c$
- 4. *uniformně asymptoticky stabilní*, právě když $\exists \alpha, c > 0 \forall s < t \in I$ platí $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \leq ce^{-\alpha(t-s)}$

Věta 29. Nechť A je konstantní matice. Potom nulové řešení rovnice $x' = Ax$ je

- 1. (uniformně) *stabilní*, právě když: $\Re \lambda \leq 0$ pro $\forall \lambda \in \sigma(A)$, přičemž $\Re \lambda = 0$ pouze pro polojednoduchá vlastní čísla
- 2. (uniformně) *asymptoticky stabilní*, právě když $\Re \lambda < 0$ pro $\forall \lambda \in \sigma(A)$

Poznámka. Matice A splňující $\Re \lambda < 0$ pro všechna $\lambda \in \sigma(A)$ se nazývá Hurwitzovská.

Lemma 30. Je dána rovnice

$$x' = Ax + r(x, t).$$

Nechť existují $c, \alpha > 0$ tak, že $\|e^{tA}\| \leq ce^{-t\alpha}$ pro $\forall t \geq 0$; nechť $r(x, t) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá a $|r(x, t)| \leq \gamma|x|$ pro $\forall x, t$, kde $\gamma < \alpha/c$.

Pak každé řešení splňuje

$$|x(t)| \leq c|x(t_0)| \exp(-\beta(t - t_0)),$$

pro $t \geq t_0$, kde $\beta = \alpha - c\gamma > 0$.

Poznámka. Speciálně lemma říká, že je nulové řešení (uniformně) asymptoticky stabilní.

Věta 31 (O linearizované stabilitě). *Je dána rovnice $x' = f(x)$. Nechť $f(x_0) = 0$, $f(x)$ je C^1 na okolí x_0 a nechť $\Re \lambda < 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(A)$, kde $A = \nabla f(x_0)$. Potom x_0 je (uniformně) asymptoticky stabilní.*

Věta 32 (O linearizované nestabilitě). *Je dána rovnice $x' = f(x)$. Nechť $f(x_0) = 0$, $f(x)$ je C^1 na okolí x_0 a nechť existuje $\lambda \in \sigma(A)$, kde $A = \nabla f(x_0)$ takové, že $\Re \lambda > 0$. Potom x_0 je nestabilní.*

Poznámka. Předchozí věty nepokrývají případ, kdy $\Re \lambda \leq 0$ pro $\lambda \in \sigma(A)$, přičemž alespoň pro jedno λ nastává rovnost. Za těchto okolností nelze obecně o stabilitě rozhodnout pouze na základě vlastností A ; mezi stabilitou rovnice $x' = f(x)$ a stabilitou „linearizované“ rovnice $x' = Ax$ obecně není souvislost.

Příklad.

$$x' = x^3 \quad x' = -x^3$$

Definice. Nechť $f(x)$ je C^1 na okolí x_0 . Nechť $f(x_0) = 0$ a nechť $\Re \lambda \neq 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(A)$. Potom x_0 nazýváme *hyperbolický stacionární bod* rovnice $x' = f(x)$.

Věta 33 (Hartman-Grobmanova věta). *Nechť x_0 je hyperbolický stacionární bod rovnice $x' = f(x)$. Potom existuje homeomorfismus, převádějící řešení této rovnice na řešení rovnice $x' = Ax$, kde $A = \nabla f(x_0)$.*

8. První integrál

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Funkce $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se nazve *první integrál* rovnice

$$x' = f(x) \quad (5)$$

v Ω , jestliže :

1. U je třídy C^1 a *nekonstantní* v Ω
2. $t \mapsto U(x(t))$ je konstantní, pokud $x(t)$ je libovolné řešení (5) v Ω

Poznámka. Fyzikální význam: zachovávající se veličina (energie). Geometrický význam: řešení (5) tvoří „vrstevnice“ grafu U .

Věta 34. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá, $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je C^1 . Potom je ekvivalentní:

- (i) pro každé $x(t)$ řešení rovnice (DR) v Ω je $t \mapsto V(x(t), t)$ konstantní
- (ii) $\partial_t V(x, t) + \nabla_x V(x, t) \cdot f(x, t) = 0$ pro každý bod $(x, t) \in \Omega$

Definice. Výraz $\partial_t V(x, t) + \nabla_x V(x, t) \cdot f(x, t)$ podrobně zapsáno

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x, t) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j}(x, t) f_j(x, t)$$

nazýváme *orbitální derivací* funkce V vzhledem k rovnici (DR). Značíme $\dot{V}_f$. Je-li $x(t)$ libovolné řešení (DR), pak $\frac{d}{dt} V(x(t), t) = \dot{V}_f(x(t), t)$.

Definice. Funkce $U_j(x)$ třídy C^1 nazveme *nezávislé* v bodě x_0 , jestliže matice $\left\{ \frac{\partial U_j}{\partial x_i}(x_0) \right\}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, k$ má hodnot k .

Ekvivalentně: vektory $\nabla U_j(x_0) \in \mathbb{R}^n$ jsou lineárně nezávislé.

Poznámka. Zřejmě existuje nejvýše n funkcí, jež jsou nezávislé v daném bodě. Pokud tyto funkce jsou zároveň první integrály rovnice (5), přičemž x_0 není stacionární bod, pak existuje nejvýše $n - 1$ takových funkcí.

Věta 35. Nechť jsou dány první integrály $U_1, \dots, U_k$ rovnice (5), které jsou nezávislé v bodě x_0 . Potom (5) lze v jistém okolí x_0 redukovat na soustavu $n - k$ (diferenciálních) rovnic.

Věta 36. Nechť $f(x)$ je C^1 na okolí x_0 , a nechť $f(x_0) \neq 0$. Potom rovnice (5) má $n - 1$ prvních integrálů, které jsou nezávislé v bodě x_0 .

Poznámka. Kombinace Vět 8.1 a 8.3 zaručuje (lokální) existenci řešení PDR 1. řádu

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i} f_i(x) = 0$$

pro neznámou funkci $U = U(x)$. Mírnou adaptací důkazu lze získat (na jistém okolí $x_0 \in \Omega$) řešení obecnější rovnice

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_j} f_j(x, U) + g(x, U) = 0$$

s předepsanou hodnotou na libovolné C^1 nadploše Γ za předpokladu, že $f(x_0)$ není tečný směr ke Γ v bodě x_0 . Tento postup se nazývá *metoda charakteristik*.

9. Stabilita podruhé – Ljapunovské funkce

V této kapitole studujeme opět obecnou rovnici (DR), tj.

$$x' = f(x, t)$$

za trvalých předpokladů: $f(x, t) : \mathcal{O} \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina obsahující 0 a $I = (\tau, \infty)$. Předpokládáme $f(0, t) = 0$ pro $\forall t \in I$, tj. $x(t) = 0$ je řešení v I , o jehož stabilitu půjde.

Definice. Funkce $\omega(x) : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ se nazve *pozitivně definitní*, jestliže je spojitá, $\omega(0) = 0$ a $\omega(x) > 0$ pro $\forall x \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$.

Definice. Funkce $V(x, t) : \mathcal{O} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ se nazve *Ljapunovská funkce* rovnice (DR) pro bod 0, jestliže:

- (i) $V(x, t)$ je spojitá, nezáporná a $V(0, t) = 0$ pro $\forall t \in I$
- (ii) funkce $t \mapsto V(x(t), t)$ je nerostoucí pro každé $x(t)$ řešení (DR) v $\mathcal{O} \times I$
- (iii) existuje pozitivně definitní funkce $\omega(x)$ v $\mathcal{O}$ taková, že $V(x, t) \geq \omega(x)$ pro každý bod $(x, t) \in \mathcal{O} \times I$

Poznámka. Je-li $V(x, t)$ třídy C^1 , je podmínka (ii) výše ekvivalentní nekladnosti orbitální derivace, tj.

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x, t) + \nabla_x V(x, t) \cdot f(x, t) \leq 0 \quad \forall (x, t) \in \mathcal{O} \times I$$

Důkaz je analogický Větě 8.1. Podobně podmínka (v) ve Větě 10.2 níže je ekvivalentní

$$\dot{V}_f(x, t) \leq -\eta(x),$$

pro všechny body $(x, t) \in \mathcal{O} \times I$.

Věta 37. *Nechť rovnice (DR) má Ljapunovskou funkci pro bod 0. Potom nulové řešení je stabilní v I .*

Lemma 38. *Nechť $\omega(x)$ je pozitivně definitní v $\mathcal{O}$, nechť $x_n \in \overline{U(0, \varepsilon)} \subset \mathcal{O}$, nechť $\omega(x_n) \rightarrow 0$. Potom $x_n \rightarrow 0$.*

Věta 39. *Nechť rovnice (DR) má Ljapunovskou funkci $V(x, t)$ v $\mathcal{O} \times I$. Nechť navíc existují funkce $\lambda(x)$ a $\eta(x)$ pozitivně definitní v $\mathcal{O}$ takové, že:*

- (iv) $V(x, t) \leq \lambda(x)$ pro každý bod $\forall (x, t) \in \mathcal{O} \times I$
- (v) $\frac{d}{dt}V(x(t), t) \leq -\eta(x(t))$ každé $x(t)$ řešení (DR) v $\mathcal{O} \times I$

Potom 0 je asymptoticky stabilní v I .

Věta 40. *Je dána rovnice $x' = Ax$, kde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

1. 0 je asymptoticky stabilní v $[0, \infty)$.
2. $\Re \lambda < 0$ pro $\forall \lambda \in \sigma(A)$, neboli A je Hurwitzovská
3. existují $\alpha, c > 0$ tak, že $\|e^{tA}\| \leq ce^{-\alpha t}$ pro $\forall t \geq 0$
4. existuje symetrická, pozitivně definitní $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ taková, že

$$A^T B + B A = -I$$

Poznámka. Poslední rovnost se nazývá *Ljapunovova rovnice*. Z bodu (4) plyne, že $V(x) = x \cdot B x$ je Ljapunovskou funkcí rovnice $x' = Ax$. Pomocí této Ljapunovské funkce lze také dokázat Větu 7.3 (o linearizované stabilitě).

10. Floquetova teorie

V této kapitole budeme studovat lineární rovnici

$$x' = A(t)x + b(t) \quad (6)$$

kde $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b(t) \in \mathbb{R}^n$ jsou spojité a **T -periodické** v $\mathbb{R}$. Budeme se zabývat otázkou existence periodických řešení a otázkou stability řešení pro (6).

Poznámka. Pro danou počáteční podmínku $x(t_0) = x_0$ podle Věty 5.1 existuje právě jedno řešení v $\mathbb{R}$. Je-li $x(t)$ řešení, je také $y(t) := x(t + T)$ řešení. Řešení $x(t)$ je T -periodické, právě když $x(T) = x(0)$.

Lemma 41. *Nechť A je regulární matice. Pak existuje matice B (obecně komplexní a ne jednoznačně určená) taková, že $e^B = A$.*

Věta 42 (Floquetova). *Nechť $\Phi(t)$ je fundamentální matice úlohy (6), nechť navíc $\Phi(0) = I$. Potom existuje regulární a vzhledem k času spojitá, T -periodická matice $Q(t)$ a dále (konstantní) matice B takové, že $\Phi(t) = Q(t)e^{tB}$.*

Poznámka. Tzv. Floquetova transformace $x = Q(t)y$ převádí rovnici

$$x' = A(t)x \quad (7)$$

na rovnici s konstantními koeficienty $y' = By$. Matice $C = \Phi(T) = e^{TB}$ se nazývá *matice monodromie*. Tato matice reprezentuje řešící operátor v čase periody a lze z ní vyčíst mnohé podstatné informace (existence periodických řešení, stabilita, ...).

Věta 43. *Nechť matice $A(t)$ je spojitá, T -periodická. Potom je ekvivalentní:*

1. rovnice (6) má pro dané T -periodické $b(t)$ právě jedno T -periodické řešení
2. rovnice (7) má pouze triviální T -periodické řešení
3. $1 \notin \sigma(C)$, kde C je matice monodromie

Věta 44. *Uvažujme homogenní rovnici $x' = A(t)x$. Nechť C je matice monodromie. Potom nulové řešení je:*

- (i) *stabilní, právě když: $|\lambda| \leq 1$ pro každé $\lambda \in \sigma(C)$ a pokud $|\lambda| = 1$, jde o polojednoduché vlastní číslo*
- (ii) *asymptoticky stabilní, právě když $|\lambda| < 1$ pro každé $\lambda \in \sigma(C)$*