Logaritmus matice

Pro regulární diagonální matici $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ (tj. $d_1, \ldots, d_n$ jsou nenulová) definujeme

$$\log D := \operatorname{diag}(\log d_1, \ldots, \log d_n),$$

kde log je nějaká větev komplexního logaritmu (viz například `http://en.wikipedia.org/wiki/Complex_logarithm`).

Pro matici $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$, která má nenulové prvky jen nad diagonálou platí $M^n = 0$, můžeme tedy definovat řadou pro logaritmus:

$$\log(I + M) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} M^k = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} M^k.$$

Nechť nyní $A = VJV^{-1} = VD(I + M)V^{-1}$, kde J je Jordanův kanonický tvar matice, V je matice vlastních vektorů, D je diagonální matice se stejnou diagonálou jako J a M je nulová až na některá místa nad hlavní diagonálou (kde má hodnoty λ_i^{-1}). Definujeme

$$B := \log A := V(\log D + \log(I + M))V^{-1}$$

Ukážeme, že $e^B = A$.

Z definice matice B a vlastností maticové exponenciály máme

$$e^B = e^{V(\log D+\log(I+M))V^{-1}} = Ve^{\log D+\log(I+M)}V^{-1} \tag{1}$$

Protože mocniny matice M a tedy i matice $\log(I + M)$ jsou blokově diagonální (podle bloků Jordanova kanonického tvaru) a na všech řádcích jednoho bloku má matice $\log D$ stejné hodnoty, matice $\log D$ a $\log(I + M)$ komutují (rozmyslete si). Odtud plyne, že

$$e^{\log D+\log(I+M)} = e^{\log D}e^{\log(I+M)} \tag{2}$$

(známý fakt o exponenciále komutujících matic). Ukážeme-li, že $e^{\log D} = D$ a $e^{\log(I+M)} = I + M$, bude z (1) a (2) plynout

$$e^B = Ve^{\log D+\log(I+M)}V^{-1} = e^{\log D}e^{\log(I+M)} = VD(I + M)V^{-1} = A$$

a budeme hotovi.

Pro diagonální matici $\log D$ máme snadno

$$e^{\log D} = e^{\operatorname{diag}(\log \lambda_1,\ldots,\log \lambda_n)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}[\operatorname{diag}(\log \lambda_1, \ldots, \log \lambda_n)]^k =$$

$$\operatorname{diag}(e^{\log\lambda_1},\dots,e^{\log\lambda_n})=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=D,$$

což jsme potřebovali. Pro matici $\log(I+M)$ máme

$$e^{\log(I+M)}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}M^k\right)^j.$$

Protože $M^n=0$, můžeme přes j sčítat také jen do $n-1$, tj.

$$e^{\log(I+M)}=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j!}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}M^k\right)^j.$$

V této konečné sumě můžeme přeskupovat sčítance, jak se nám zlíbí. Také můžeme použít multinomickou větu, protože mocniny M vzájemně komutují, dostáváme

$$\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j!}\left(\sum_{k_1+\cdots+k_{n-1}=j}\frac{j!}{k_1!k_2!\dots k_{n-1}!}\prod_{i=1}^{n-1}\left(\frac{(-1)^{i+1}}{i}M^i\right)^{k_i}\right)=$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k_1+\cdots+k_{n-1}=j}\frac{(-1)^{k_1+2k_2+\cdots+(n-1)k_{n-1}+j}}{k_1!k_2!\dots k_{n-1}!\cdot 1^{k_1}\cdots(n-1)^{k_{n-1}}}M^{k_1+2k_2+\cdots+(n-1)k_{n-1}}$$

Dáme-li nyní všechny stejné mocniny matice M k sobě a zanedbáme ty, které jsou umocněny na n nebo větší číslo, máme

$$e^{\log(I+M)}=\sum_{i=0}^{n-1}M^i\sum_{k_1+2k_2+\cdots+(n-1)k_{n-1}=i}\frac{(-1)^{i+k_1+\cdots+k_{n-1}}}{k_1!k_2!\dots k_n!\cdot 1^{k_1}\cdots(n-1)^{k_{n-1}}}.$$

Provedeme nyní stejný výpočet pro $x\in(-1,1)$:

$$e^{\log(1+x)}=\sum_{i=0}^{n-1}x^i\sum_{k_1+2k_2+\cdots+(n-1)k_{n-1}=i}\frac{(-1)^{i+k_1+\cdots+k_{n-1}}}{k_1!k_2!\dots k_{n-1}!\cdot 1^{k_1}\cdots(n-1)^{k_{n-1}}}.$$

Protože však $e^{\log(1+x)}=1+x$, máme

$$\sum_{k_1+2k_2+\cdots+(n-1)k_{n-1}=i}\frac{(-1)^{i+k_1+\cdots+k_{n-1}}}{k_1!k_2!\dots k_n!\cdot 1^{k_1}\cdots(n-1)^{k_{n-1}}}=1,\qquad \text{pro } i=0,1$$

a

$$\sum_{k_1+2k_2+\cdots+(n-1)k_{n-1}=i}\frac{(-1)^{i+k_1+\cdots+k_{n-1}}}{k_1!k_2!\dots k_n!\cdot 1^{k_1}\cdots(n-1)^{k_{n-1}}}=0,\qquad \text{pro } i\geq 2.$$

Dosadíme-li tyto sumy do výpočtu s maticemi, dostaneme

$$e^{\log(I+M)} = I + M,$$

což jsme potřebovali.