

## Domácí úkol č. 2 - Je první derivace generátorem?

*termín odevzdání: 12.3.2026*

Uvažujte operátory  $A_i$ , kde  $A_i f = f'$ , na různých podprostorech  $C([0, 1])$  s různými definičními obory:

1. Necht'

$$X_1 := C([0, 1]), \quad D(A_1) := C^1([0, 1]).$$

Ukažte, že  $\lambda - A_1$  nikdy není prostý (definiční obor je moc velký), a tedy  $A_1$  není generátorem  $C_0$ -semigrupy (proč?).

2. Necht'

$$X_2 := C([0, 1]), \quad D(A_2) := \{f \in C^1([0, 1]), f'(1) = 0\}.$$

Ukažte pomocí Lumer–Phillipsovy věty, že  $A_2$  je generátorem  $C_0$ -semigrupy.

3. Necht'

$$X_3 := C([0, 1]), \quad D(A_3) := \{f \in C^1([0, 1]), f(1) = 0\}.$$

Ukažte, že  $A_3$  není hustě definovaný (definiční obor je moc malý), a tedy  $A_3$  není generátorem  $C_0$ -semigrupy. Ukažte, že ostatní předpoklady Hille–Yosidovy věty operátor splňuje (uzavřenost, podmínku na rezolventní množinu a rezolventní odhad).

4. Ukažte, že  $A_3$  generuje  $C_0$ -semigrupu na uzávěru svého definičního oboru, tj.

$$X_4 := \{f \in C([0, 1]), f(1) = 0\}, \quad D(A_4) := \{f \in C^1([0, 1]), f(1) = 0, f'(1) = 0\}$$

je generátorem  $C_0$ -semigrupy.

Rozmyslete si, jak vypadají semigrupy generované operátory  $A_2, A_4$ .