Domácí úkol č. 1 - multiplikativní semigrupy

termín odevzdání: čtvrtek 26.2.

Buď $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ měřitelná, $m : \Omega \to \mathrm{C}$ měřitelná, splňující $\operatorname{esssup}\{\operatorname{Re} m(x);\ x \in \Omega\} = K < +\infty$ (tj. $\operatorname{Re} m(x) \leq K$ s.v. v Ω a pro žádné menší K' to neplatí). Označme $(A_m, D(A_m))$ multiplikativní operátor na $L^p(\Omega, \mathrm{C})$, $1 \leq p < +\infty$, tj.

$$(A_m f)(x) := m(x) f(x), \quad D(A_m) := \{f \in L^p(\Omega, \mathrm{C});\ mf \in L^p(\Omega, \mathrm{C})\}$$

a pro $t \geq 0$ buď $S_m(t)$ operátor definovaný předpisem

$$(S_m(t) f)(x) := e^{tm(x)} f(x), \qquad \text{pro } f \in L^p(\Omega, \mathrm{C}).$$

Poznámka: Speciálně $\operatorname{Im} m$ nemusí být omezená a $\operatorname{Re} m$ nemusí být omezená zdola. Chcete-li si úkol zjednodušit, můžete řešit pro konkrétní případ $\Omega = (0, 1)$, $m(x) = -\frac{1}{x}$.

1. Ukažte, že $t \mapsto S_m(t)$ je C_0-semigrupa.

2. Ukažte, že $(A_m, D(A_m))$ je jejím generátorem. [Např. pomocí Lebesgueovy věty a Věty: $f_n \to f$ v L^p normě, pak existuje vybraná, která konverguje k f skoro všude.]

3. Najděte tzv. mez růstu semigrupy S_m, tj.

$$\omega_0(S_m) := \inf\{\omega \in \mathrm{R};\ \exists M \geq 1,\ \|S_m(t)\| \leq M e^{\omega t},\ \forall t \geq 0\}.$$

4. Nepovinně: Najděte spektrum A_m, tj. množinu všech $\lambda \in \mathrm{C}$, že $\lambda - A_m$ není bijekce $D(A_m)$ na $L^p(\Omega, \mathrm{C})$. Najděte spektrum $S_m(t)$. Všimněte si, jaký je vztah mezi spektrem generátoru, spektrem semigrupy a mezí růstu semigrupy.