Modelování kovariancí pro EnKF a jeho stabilita

Marie Turčičová[1,2]   Jan Mandel[3]

[1]Matematicko-fyzikální fakulta UK
[2]Ústav informatiky AV ČR
[3]University of Colorado Denver

Robust, 21. - 26. ledna 2018, Rybník

Filtrační úloha

Uvažujme dynamický proces

$$u_{j+1} = \mathcal{M}(u_j), \quad j \in \mathbb{N}_0$$

- $u_j \in \mathbb{R}^p$ pro všechna j
- $u_0 \sim N_p(\mathbf{0}, \mathrm{C}_0)$, kde C_0 známé

K dispozici máme pozorování

$$y_j = u_j + \gamma\xi_j, \qquad \xi_j \sim N_p(\mathbf{0}, \mathrm{I}),$$

kde šum ξ_j je nezávislý na u_0. Koeficient γ známe.

Cílem filtrace je aproximovat rozdělení $P(u_j | y_1, \ldots, y_j)$ v každém časovém kroku.

Ensemblový Kalmanův filtr

1. generování počátečního ensemblu

$$v_0^{A(k)} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathrm{C}_0), \qquad k = 1, \ldots, K$$

2. **předpověď**:

$$v_{j+1}^{F(k)} = \mathcal{M}\left(v_j^{A(k)}\right), \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$$

3. pozorování:

$$y_{j+1} = u_{j+1} + \gamma\left(\xi_{j+1} + \xi_{j+1}^{(k)}\right), \qquad \xi_{j+1}, \xi_{j+1}^{(k)} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathrm{I})$$

4. **analýza**:

$$v_{j+1}^{A(k)} = v_{j+1}^{F(k)} - \hat{\mathrm{C}}_{j+1}^{F}\left(\hat{\mathrm{C}}_{j+1}^{F} + \gamma^2 \mathrm{I}\right)^{-1}\left(v_{j+1}^{F(k)} - y_{j+1}^{(k)}\right),$$

kde $\hat{\mathrm{C}}_{j+1}^{F}$ odhad kovariance založený na $\{v_{j+1}^{F(k)}\}_{k=1}^{K}$.

Ensemblový Kalmanův filtr

Pozorujeme-li celý stav, lze analýzu zapsat ve tvaru (Kelly et al. 2014)

$$\left(\mathrm{I} + \gamma^{-2}\hat{\mathrm{C}}^F_{j+1}\right) v^{A(k)}_{j+1} = v^{F(k)}_{j+1} + \gamma^{-2}\hat{\mathrm{C}}^F_{j+1} y^{(k)}_{j+1},$$

který umožňuje následující rozbor stability.

Odhady kovariance pro EnKF

Klíčovým prvkem analýzy je odhad kovarianční matice $\hat{\mathrm{C}}_j^F$.
Problémem je, že $p >> K$.

- výběrová kovariance S (z ensemblu)
- shrinkage odhad:

$$\hat{\mathrm{C}} = \alpha S + (1-\alpha)T, \quad \text{for } \alpha \in [0,1]$$

  (pro velkou dimenzi viz (Nino-Ruiz, Sandu 2015), (Touloumis 2014))
- vhodně zvolený parametrický model:

$$\hat{\mathrm{C}} = f(\boldsymbol{\theta})$$

Konvergence EnKF

$K \to \infty$ pro každé j a $j \to \infty$

- pro konečnou dimenzi: (Le Gland et al. 2011), (Le Gland et al. 2011), (Mandel et al. 2011) - empirické rozdělení členů ensemblu konverguje k rozdělení odpovídajícímu KF
- nezávisle na dimenzi: (Kasanický, Mandel 2017), (Kwiatkowski, Mandel 2015) - průměr a výběrová kovariance ensemblu konvergují (v $L^p, 1 \leq p < \infty$) ke střední hodnotě a kovarianci odpovídající KF

K pevné, $j \to \infty$:

- pro Navier-Stokesovy rovnice: (Kelly et al. 2014) - chyba $\mathrm{E}\,|v_j^{(k)} - u_j|^2$ neroste rychleji než exponenciálně, ale je přímo úměrná K

Stabilita pro obecný kovarianční model

Označme
$$e_j^{(k)} = v_j^{A(k)} - u_j$$

Theorem

Uvažujme EnKF algoritmus a předpoklady z úvodu. Dále předpokládejme, že $|\mathcal{M}(x) - \mathcal{M}(y)| \leq m|x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}^p$. Pak pro libovolný odhad kovariance $\hat{\mathrm{C}}_i^F$ platí:

$$\mathrm{E}\,|e_j^{(k)}|^2 \leq m^{2j}\,\mathrm{E}\,|e_0^{(k)}|^2 + \frac{1}{2}\frac{m^{2(j-1)} - 1}{m^2 - 1}\max_{i=1,\dots,j}\mathrm{tr}(\mathrm{E}\,\hat{\mathrm{C}}_i^F) \quad \forall j \geq 1.$$

- kvadratická odchylka neroste rychleji než exponenciálně
- nezávisle na dimenzi a rozsahu ensemblu
- roli nehraje ani rozptyl chyb pozorování

Jednoparametrický kovarianční model

Uvažujme kovarianční model

$$\mathrm{C}_j^F = A_j \mathrm{D},$$

- $A_j \in \mathbb{R}_0^+$ je parametr
- D je vhodně zvolená diagonální matice

Pokud by byl ensemble iid a s normálním rozdělením, pak A_j lze odhadnout metodou maximální věrohodnosti:

$$\hat{A}_j = \frac{1}{Kp} |\mathrm{D}^{-1/2} \mathbb{V}_j^F|_{HS}^2,$$

kde $\mathbb{V}_j^F = \left(v_j^{F(1)}, \dots, v_j^{F(K)} \right)$ je matice ensemblových členů.

V praxi ensembl není iid, ani normálně rozdělený.

Stabilita pro jednoparametrický kovarianční model

Pro kovarianční model $\hat{\mathrm{C}}_j^F = \hat{A}_j \mathrm{D}$, kde $\hat{A}_j$ je MLE, platí:

$$\mathrm{E}\,|e_j^{(k)}|^2 \leq (m^2+\theta)^j\,\mathrm{E}\,|e_0^{(k)}|^2 + \theta\frac{(m^2+\theta)^{j-1}-1}{m^2+\theta-1}\max_{i=1,\dots,j}\mathrm{E}\,|u_i|^2$$

pro všechna $j \geq 1$, kde $\theta = \frac{1}{p}\,\mathrm{tr}\,\mathrm{D}|\mathrm{D}^{-1/2}\mathcal{M}|^2$, přičemž $|D^{-1/2}\mathcal{M}|$ je Lipschitzovská konstanta operátoru $D^{-1/2}\mathcal{M}$.

Kdy je $\mathrm{E}\,|u_i|^2 < \infty$:

- pro lineární systémy je $\mathrm{E}\,|u_i|^2 \leq m^i \mathrm{C}_0$
- pro některé dynamické systémy je $\mathrm{E}\,|u_i|^2$ omezené, neboť existuje omezená absorbční množina (Temam 1997).

Poznámka

Podmínka, že pozorujeme celý stav je pro stabilitu klíčová.

V (Kelly et al. 2015) je příklad speciální zkonstruovaného observačního operátoru, kde v konečném čase dochází k divergenci, ačkoli pro dynamický model existuje omezená absorbční množina.

Děkuji za pozornost.

Tento výstup vznikl v rámci projektu SVV 2017 č. 260454 a NSF grantů DMS-1216481 a ICER-1664175.

Literatura

- Kasanický I., Mandel J.: *Convergence of the ensemble Kalman filter in infinite dimension.* In progress, 2017.
- Kelly D., Law K., Stuart A.: *Well-Posedness And Accuracy Of The Ensemble Kalman Filter In Discrete And Continuous Time*. Nonlinearity, 27(10):2579–2603, 2014.
- Kelly D., Majda A., and Tong X.. Concrete ensemble Kalman filters with rigorous catastrophic filter divergence. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 112(34):10589–10594, 2015.
- Kwiatkowski E., Mandel J.: *Convergence of the square root ensemble Kalman filter in the large ensemble limit.* SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification, 3(1):1-17, 2015.
- Le Gland F., Monbet V. and Tran V.-D.: *Large sample asymptotics for the ensemble Kalman filter*. The Oxford Handbook of Nonlinear Filtering, D. Crisan and B. Rozovskiii, eds., Oxford University Press, 598 – 631, 2011.

Literatura

- Mandel J., Cobb L., and Beezley J.D.: *On the convergence of the ensemble Kalman filter*. Applications of Mathematics, 56:533–541, 2011.
- Nino-Ruiz E.D., Sandu A.:*Ensemble Kalman filter implementations based on shrinkage covariance matrix estimatrion*, Ocean Dynamics, 65(11): 1423–1439, 2015.
- Temam R.. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, volume 68 of Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997.
- Touloumis A.: *Nonparametric Stein-type shrinkage covariance matrix estimators in high-dimensional settings.* arXiv: 1410.4726, 2014.