Parametrizované parciálne sumácie

Michaela Koščová, Ján Mačutek, Gejza Wimmer

Robust 2016

Obsah

Parciálna sumácia

$$P_j^*$$

- $\{P_j^*\}_{j=0}^{\infty}$ - diskrétne rozdelenie

Parciálna sumácia

$$\sum \qquad P_j^*$$

- $\{P_j^*\}_{j=0}^{\infty}$ - diskrétne rozdelenie

Parciálna sumácia

$$\sum_{j=x}^{\infty} P_j^*, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

- $\{P_j^*\}_{j=0}^{\infty}$ - diskrétne rozdelenie

Parciálna sumácia

$$\sum_{j=x}^{\infty} g(j) P_j^*, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

- $\{P_j^*\}_{j=0}^{\infty}$ - diskrétne rozdelenie
- $g(j)$ - reálna funkcia nezávislá od x (typ sumácie)

Parciálna sumácia

$$P_x = \sum_{j=x}^{\infty} g(j) P_j^*, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

- $\{P_j^*\}_{j=0}^{\infty}$ - diskrétne rozdelenie
- $g(j)$ - reálna funkcia nezávislá od x (typ sumácie)
- $\{P_x\}_{x=0}^{\infty}$ - diskrétne rozdelenie

Parciálna sumácia

$$P_x = \sum_{j=x}^{\infty} g(j) P_j^*, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

- $\{P_j^*\}_{j=0}^{\infty}$ - diskrétne rozdelenie (rodič (parent))
- $g(j)$ - reálna funkcia nezávislá od x (typ sumácie)
- $\{P_x\}_{x=0}^{\infty}$ - diskrétne rozdelenie (potomok (descendant))

Invariancia

Poissonovo rozdelenie

$$P_x = \sum_{j=x}^{\infty} \frac{j - \lambda + 1}{j + 1} P_j^*, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

geometrické rozdelenie[1]

$$P_x = \sum_{j=x}^{\infty} p P_j^*, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

[1] Wimmer, Kalas (1999). A characterization of the geometic distribution. *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 325-329.

Invariancia[2]

vzhľadom na parciálnu sumáciu definovanú funkciou $g(j)$

$$g(j) = 1 - \frac{P^*_{j+1}}{P^*_j}, \qquad j = 0, 1, 2, \dots$$

[2] Mačutek (2003). On two types of partial summations. *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 403-410.

Tri zložky parciálnej sumácie[3]

$$P_x = \sum_{j=x}^{\infty} g(j) P_j^*, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

- $\{P_j^*\}_{j=0}^{\infty}$ - diskrétne rozdelenie (rodič)
- $\{P_x\}_{x=0}^{\infty}$ - diskrétne rozdelenie (potomok)
- $g(j)$ - reálna funkcia (typ parciálnej sumácie)

[3] Wimmer, Mačutek (2012). New integrated view at partial-sums distributions. *Tatra Mountains Mathematical Publications*,183-190

Parametrizácia parciálnej sumácie

$$P_x = \sum_{j=x}^{\infty} g(j) P_j^*, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Parametrizácia parciálnej sumácie

$$P_x = \sum_{j=x}^{\infty} g(j) P_j^*, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

- nech rodič závisí od jednorozmerného parametra a

Parametrizácia parciálnej sumácie

$$P_x = \sum_{j=x}^{\infty} g(j) P_j^*(a), \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Parametrizácia parciálnej sumácie

$$P_x = \sum_{j=x}^{\infty} g(j) P_j^*(a), \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

- potom aj potomok závisí od parametra a

Parametrizácia parciálnej sumácie

$$P_x(a) = \sum_{j=x}^{\infty} g(j) P_j^*(a), \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Parametrizácia parciálnej sumácie

$$P_x(a) = \sum_{j=x}^{\infty} g(j) P_j^*(a), \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

- nech $g(j)$ je tá funkcia, ktorá necháva rodiča nezmeneného, teda $g(j) = 1 - \frac{P_{j+1}^*(a)}{P_j^*(a)}$

Parametrizácia parciálnej sumácie

$$P_x(a) = \sum_{j=x}^{\infty} g(j) P_j^*(a), \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

- nech $g(j)$ je tá funkcia, ktorá necháva rodiča nezmeneného, teda $g(j) = 1 - \frac{P_{j+1}^*(a)}{P_j^*(a)}$
- teda aj $g(j)$ závisí od parametra a

Parametrizácia parciálnej sumácie

$$P_x(a) = \sum_{j=x}^{\infty} g(j, a) P_j^*(a), \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Parametrizácia parciálnej sumácie

$$P_x(a) = \sum_{j=x}^{\infty} g(j, a) P_j^*(a), \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

- zameňme hodnotu parametra a vo funkcii $g(j, a)$ za inú hodnotu λ

Zmena parametra parciálnej sumácie

$$P_x(a, \lambda) = c \sum_{j=x}^{\infty} g(j, \lambda) P_j^*(a), \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Poissonovo rozdelenie

- $P_j^*(a) = \frac{e^{-a}a^j}{j!}$
- $g(j, \lambda) = 1 - \frac{P_{j+1}^*(\lambda)}{P_j^*(\lambda)} = \frac{j+1-\lambda}{j+1}$
- $c = \left(\sum_{x=0}^{\infty} \sum_{j=x}^{\infty} g(j, \lambda) P_j^*(a) \right)^{-1} = \frac{1}{1-\lambda+a}$

$$P_x(a, \lambda) = \frac{1}{1-\lambda+a} \sum_{j=x}^{\infty} \frac{j+1-\lambda}{j+1} \frac{e^{-a}a^j}{j!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Geometrické rozdelenie

- $P_j^*(a) = a(1-a)^j$
- $g(j,\lambda) = 1 - \frac{P_{j+1}^*(\lambda)}{P_j^*(\lambda)} = \lambda$
- $c = \left(\sum_{x=0}^{\infty} \sum_{j=x}^{\infty} g(j,\lambda) P_j^*(a) \right)^{-1} = \frac{a}{\lambda}$

$$P_x(a,\lambda) = \frac{a}{\lambda} \sum_{j=x}^{\infty} \lambda a(1-a)^j = a^2 \sum_{j=x}^{\infty} (1-a)^j = a(1-a)^x,$$

$$x = 0, 1, 2, \ldots$$

Zmena parametra parciálnej sumácie

$$P_x = c \sum_{j=x}^{\infty} g(j, \lambda) P_j^*(a), \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

potomok má dva parametre

(rodič je citlivý na zmenu parametra parciálnej sumácie)

$\nearrow$

$\searrow$

parameter λ sa eliminuje vplyvom konštanty c

(rodič je rezistentný voči zmene parametra sumácie)

Rozdelenia rezistentné voči zmene parametra parciálnej sumácie

Nutná a postačujúca podmienka pre rezistenciu

Rozdelenie $\{P_x^*\}_{x=0}^{\infty}$ je rezistentné voči zmene parametra parciálnej sumácie práve vtedy, keď

$$\frac{1}{1-\frac{P_1^*(\lambda)}{P_0^*(\lambda)}P_0^*(a)+\sum_{s=1}^{\infty}[s-(s+1)\frac{P_{s+1}^*(\lambda)}{P_s^*(\lambda)}]P_s^*(a)}=\frac{1-\frac{P_{x+1}^*(a)}{P_x^*(a)}}{1-\frac{P_{x+1}^*(\lambda)}{P_x^*(\lambda)}},$$

$$x=0,1,2,\dots\ .$$

Rozdelenia rezistentné voči zmene parametra parciálnej sumácie

Nutná podmienka rezistencie

Ak je rozdelenie $\{P_x^*\}_{x=0}^{\infty}$ rezistentné voči zmene parametra parciálnej sumácie, potom

$$\frac{1 - \frac{P_{x+1}^*(a)}{P_x^*(a)}}{1 - \frac{P_{x+1}^*(\lambda)}{P_x^*(\lambda)}}$$

nezávisí od x.

Ďakujem za pozornosť - diskusia pod palmou

Parametrizované parciálne sumácie

Michaela Koščová[1], Ján Mačutek[1], Gejza Wimmer[2]

[1] Department of Applied Mathematics and Statistics, Comenius University, Bratislava, Slovakia
[2] Mathematical Institute, Slovak Academy of Sciences, Bratislava, Slovakia

Úvod

Uvažujme zovšeobecnenú parciálnu sumáciu

$$P_x(a) = \sum_{j=x}^{\infty} g(j) P_j^*(a), \quad x = 0, 1, 2, \dots, \tag{1}$$

ktorá sa dá chápať ako postupnosť rovníc

$$\begin{aligned}
P_0(a) &= g(0)P_0^*(a) + g(1)P_1^*(a) + g(2)P_2^*(a) + \dots, \\
P_1(a) &= g(1)P_1^*(a) + g(2)P_2^*(a) + \dots, \\
P_2(a) &= g(2)P_2^*(a) + \dots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

pričom rozdelenie $\{P_j^*(a)\}_{j=0}^{\infty}$ nazývame rodič a rozdelenie $\{P_j(a)\}_{j=0}^{\infty}$ potomok (pozri [1, 2]), obe definované na nezáporných celých číslach, a je parameter. Zameriavame sa iba na jednoparametrické rozdelenia. Nutná a postačujúca podmienka invariancie vzhľadom na sumáciu (1) sa dá nájsť v [1]. Nech $f(x)$ je funkcia daná vzťahom

$$P_{x+1}^*(a) = f(x+1) P_x^*(a), \quad x = 0, 1, 2, \dots .$$

Rodič je invariantný (teda zostáva nezmenený $P_x^*(a) = P_x(a)$, $x = 0, 1, 2, \dots$) vzhľadom na sumáciu (1) práve vtedy, keď

$$g(x) = 1 - f(x+1) = 1 - \frac{P_x^*(a)}{P_{x+1}^*(a)}, \quad x = 0, 1, 2, \dots . \tag{2}$$

Pre zdôraznenie úlohy parametra a budeme ďalej používať označenie

$$g(x) = g(x, a),$$

$$f(x) = f(x, a).$$

Referencie

[1] Mačutek, J. (2003). On two types of partial summation. *Tatra Mountains Mathematical Publications*, **26**, 403–410.

[2] Wimmer, G., Mačutek, J.(2012). New integrated view at partial-sums distributions. *Tatra Mountains Mathematical Publications*, **51**, 183–190.

Parametrizovaná parciálna sumácia

Teraz uvažujme modifikáciu sumácie (1)

$$P_x = c \sum_{j=x}^{\infty} g(j, \lambda) P_j^*(a), \quad x = 0, 1, 2, \dots, \tag{3}$$

kde vzťah (2) je zachovaný, avšak hodnota parametra a bola nahradená inou hodnotou λ a c je vhodná konštanta. Sumáciu (3) môžeme písať ako postupnosť rovníc

$$\begin{aligned}
P_0 &= c\{g(0,\lambda)P_0^*(a) + g(1;\lambda)P_1^*(a) + g(2,\lambda)P_2^*(a) + \dots\}, \\
P_1 &= c\{ + g(1,\lambda)P_1^*(a) + g(2,\lambda)P_2^*(a) + \dots\}, \\
P_2 &= c\{ + g(2,\lambda)P_2^*(a) + \dots\}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

alebo ekvivalentne

$$\begin{aligned}
P_0 &= c\{[1 - f(1,\lambda)]P_0^*(a) + [1 - f(2,\lambda)]P_1^*(a) + \dots\}, \\
P_1 &= c\{ + [1 - f(2,\lambda)]P_1^*(a) + \dots\}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

teda

$$\begin{aligned}
P_0 = c\{&P_0^*(a) + P_1^*(a) + P_2^*(a) + \dots - \\
&-[f(1,\lambda)P_0^*(a) + f(2,\lambda)P_1^*(a) + f(3,\lambda)P_2^*(a) + \dots]\}, \\
P_1 = c\{&P_1^*(a) + P_2^*(a) + \dots - \\
&-[f(2,\lambda)P_1^*(a) + f(3,\lambda)P_2^*(a) + \dots]\}, \\
P_2 = c\{&P_2^*(a) + \dots - \\
&-[f(3,\lambda)P_2^*(a) + \dots]\}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Sčítaním týchto rovníc dostávame

$$1 = c\left\{[P_0^*(a) + 2P_1^*(a) + \dots] - \sum_{s=1}^{\infty} s f(s;\lambda) P_{s-1}^*(a)\right\},$$

a následne

$$c = \frac{1}{\{[P_0^*(a) + 2P_1^*(a) + \dots] - \sum_{s=1}^{\infty} s f(s;\lambda) P_{s-1}^*(a)\}}. \tag{4}$$

Ak má rozdelenie $\{P_j^*(a)\}_{j=0}^{\infty}$ z (3) konečnú strednú hodnotu $\mathcal{E}(P^*)$, potom

$$c = \frac{1}{\mathcal{E}(P^*) + 1 - \sum_{s=1}^{\infty} s f(s;\lambda) P_{s-1}^*(a)}. \tag{5}$$

Ak konštanta c daná (4) alebo (5) je kladná, potom (3) je rozdelenie pravdepodobnosti.

Príklad - Poissonovo rozdelenie

$$P_j^*(a) = \frac{e^{-a} a^j}{j!}, \qquad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$f(s,\lambda) = \frac{P_s^*(\lambda)}{P_{s-1}^*(\lambda)} = \frac{\lambda}{s}, \quad g(s,\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{s+1},$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} s f(s;\lambda) P_{s-1}^*(a) = \sum_{s=1}^{\infty} s \frac{\lambda e^{-a} a^{s-1}}{s\,(s-1)!} = \lambda,$$

$$\mathcal{E}(P^*) = a, \quad c = \frac{1}{a + 1 - \lambda,}$$

dosadením do sumácie (3) máme

$$P_x = P_x(a,\lambda) = \frac{1}{a+1-\lambda} \sum_{j=x}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{j+1}\right) \frac{e^{-a} a^j}{j!}. \tag{6}$$

Dostali sme nové diskrétne rozdelenie s dvomi parametrami a a λ. Keďže $c = \frac{1}{a+1-\lambda}$ musí byť kladná a a a λ sú parametre dvoch (vo všeobecnosti rozdielnych) Poissonovych rozdelení, musí platiť $0 < \lambda < a + 1$.

Príklad - geometrické rozdelenie

$$P_j^*(a) = a(1-a)^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

$$f(s,\lambda) = \frac{P_s^*(\lambda)}{P_{s-1}^*(\lambda)} = 1 - \lambda, \quad g(s,\lambda) = \lambda,$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} s f(s;\lambda) P_{s-1}^*(a) = \sum_{s=1}^{\infty} s(1-\lambda) a (1-a)^{s-1} = \frac{1-\lambda}{a},$$

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}^*) = \frac{1-a}{a}, \quad c = \left(\frac{1-a}{a} + 1 - \frac{1-\lambda}{a}\right)^{-1} = \frac{a}{\lambda}$$

dosadením do sumácie (3) máme

$$P_x = P_x(a,\lambda) = \frac{a}{\lambda} \sum_{j=x}^{\infty} \lambda a (1-a)^j = a(1-a)^x = P_x^*(a). \tag{7}$$

Výsledne rozdelenie je totožné s rodičom bez ohľadu na hodnotu parametra λ. Tento parameter bol “eliminovaný” pomocou normalizačnej konštanty c.

Citlivé a rezistentné rozdelenia

Rozdelenie $\{P_x\}_{x=0}^{\infty}$, pozri (3), buď závisí od dvoch parametrov, a a λ, alebo druhý parameter λ je “eliminovaný” pomocou normalizačnej konštanty c. Vzhľadom na túto vlastnosť je možné kategorizovať jednoparametrické diskrétne rozdelenia do dvoch vyššie uvedených skupín. Napríklad, aplikovaním sumácie (3) na Poissonovo rozdelenie dostávame nové dvojparametrické rozdelenie (6), takže patrí medzi rozdelenia citlivé na zmenu parametra parciálnej sumácie. Na druhej strane, napríklad geometrické rozdelenie (7) patrí medzi rozdelenia rezistentné voči zmene parametra parciálnej sumácie (3).

Veta: *Diskrétne rozdelenie $\{P_x^*(a)\}_{x=0}^{\infty}$ s konečnou strednou hodnotou patrí medzi rozdelenia rezistentné voči zmene parametra parciálnej sumácie práve vtedy, keď*

$$\frac{1 - f(j+1,\lambda)}{1 - f(1,\lambda)P_0^*(a) + \sum_{s=1}^{\infty} P_s^*(a)[s(1 - f(s+1,\lambda))]} =$$

$$= 1 - f(j+1,a), \qquad j = 0, 1, 2, \dots .$$

Vzťah z vety môžeme preformulovať:

$$1 - f(1,\lambda)P_0^*(a) + \sum_{s=1}^{\infty} P_s^*(a)\,[s\,(1 - f(s+1,\lambda))] =$$

$$= \frac{1 - f(j+1,\lambda)}{1 - f(j+1,a)} = \frac{1 - \frac{P_{j+1}^*(\lambda)}{P_j^*(\lambda)}}{1 - \frac{P_{j+1}^*(a)}{P_j^*(a)}}.$$

Ľavá strana tejto rovnosti nezávisí od parametra j, takže rovnako to musí platiť aj pre pravú stranu rovnosti. Týmto sme sformulovali nutnú podmienku rezistencie rozdelenia vzhľadom na zmenu parametra λ v parciálnej sumácii (3). Navyše, ak je nutná podmienka splnená, potom zo (4) musí platiť

$$c = \frac{1 - \frac{P_{j+1}^*(a)}{P_j^*(a)}}{1 - \frac{P_{j+1}^*(\lambda)}{P_j^*(\lambda)}}.$$

Podporené grantom VEGA 2/0047/15 (M. Koščová, J. Mačutek, G. Wimmer) a grantom UK/138/2016 (M. Koščová).