Ekonomická fakulta
Faculty of Economics
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Principy invariance pro (slabě závislá) náhodná pole

Jana Klicnarová
Ekonomická fakulta, Jihočeská univerzita, Studentská 13, České Budějovice

ROBUST 2016

Obsah přednášky

1. Úvod do problematiky.
2. Využití martingalových aproximací.
3. Nové výsledky.
4. Aplikace.

Náhodná pole

Kolekce náhodných veličin $(X_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \boldsymbol{Z}^d}$, které jsou indexovány parametry $\mathbf{i}$ z d-rozměrného prostoru $\boldsymbol{Z}^d$.

Položme

$$S_{\Lambda_n} = \sum_{\mathbf{i} \in \Lambda_n} X_{\mathbf{i}},$$

kde $\Lambda_n \subset \boldsymbol{Z}^d$.

CLV

Hledáme, jestli existuje posloupnost a_n taková, že

$$\frac{1}{a_n} S_{\Lambda_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}.$$

Principy invariance

Za jakých podmínek konverguje posloupnost

$$S_n(A) = \sum_{\mathbf{i}:\ \mathbf{1} \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{n}} \lambda(nA \cap R_{\mathbf{i}}) X_{\mathbf{i}},$$

kde $R_{\mathbf{i}} = (\mathbf{i} - \mathbf{1}, \mathbf{i}]$ k Wienerovu poli.

Slabá závislost

Zajímáme se o slabě závislá náhodná pole...

Možné přístupy

Mixingy

Bolthausen (1982), Goldie a Morrow (1986), Bradley (1989), Tone (2011),...

Associovaná náhodná pole

Newman (1984), Bulinski, Keane (1996),...

Projektivní přístupy

Dedecker (1998, 2001), ...

Martingalové aproximace

Pro náhodné veličiny Gordin (1969), snaha zobecnit na náhodná pole, podrobněji dále.

Značení

$$(\Omega, \mathcal{A}, P) = (\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{Z}^d}, \mathcal{B}^{\boldsymbol{Z}^d}, \mathrm{P}^{\boldsymbol{Z}^d}),$$

$$\epsilon_{\mathbf{k}}(\omega) = \omega_{\mathbf{k}},$$

$$\mathcal{F}_{\mathbf{k}} = \sigma\{\epsilon_{\mathbf{l}} : \mathbf{l} \leq \mathbf{k}, \mathbf{l} \in \boldsymbol{Z}^d\}, \text{ pro všechna } \mathbf{k} \in \boldsymbol{Z}^d,$$

$\{T^{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\boldsymbol{Z}^d}$ – $T : \boldsymbol{R}^d \to \boldsymbol{R}^d$ míru zachovávající zobrazení: $(T^{\mathbf{k}}\omega)_{\mathbf{l}} = \omega_{\mathbf{k}+\mathbf{l}}$, $\mathcal{F}_{\mathbf{0}} \subset T^{-1}(\mathcal{F}_{\mathbf{0}})$,

f – $f \in L_2$ s nulovou střední hodnotou, regulární,

$\{f \circ T^{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\boldsymbol{Z}^d}$ – náhodné pole ($X_{\mathbf{k}} = f \circ T^{\mathbf{k}}$),

$P_{\mathbf{i}}(X)$ – projekce.

MA – zobecnění

Náhodné veličiny

Gordin (1969) – výsledky pro náhodné veličiny.

Náhodná pole

Je možné Gordinovy výsledky zobecnit pro náhodná pole?

Problém

Uspořádání vícerozměrného prostoru – problém s definicí martingalu.

MA – první výsledky

Basu a Dorea (1979), Poghosyan, Roelly (1998)

Limitní věty pro vícerozměrné martingaly M_{ij} vůči filtraci:

$$\mathcal{F}_{ij} = \sigma(\varepsilon_{kl} : k \leq i,\ l \leq j).$$

Nahapetian (1995), Nahapetian, Petrossian (1995)

$U, V \subset \boldsymbol{Z}^d$ konečné. Filtrace $\mathcal{F}_V :\ U \subset V :\ \mathcal{F}_U \subset F_V$, veličiny M_V jsou $\mathcal{F}_V$ měřitelné. Martingal: $U \subset V$:

$$\mathrm{E}(M_V | \mathcal{F}_U) = M_U \ s.j.$$

MA – orthomartingaly

Novější limitní věty založeny na definici martingalů z Khoshnevisana (2002). Ta navazuje na výsledky Cairoliho (1969, 1970, ...), Walshe (1979,...) aj.

Výhoda této konstrukce je ta, že v tomto případě jsou marginály martingalů opět martingaly. Podmínkou je komutující filtrace. Tj.

$$\mathrm{E}(\mathrm{E}(X|\mathcal{F}_{\mathbf{i}})|\mathcal{F}_{\mathbf{j}}) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(X|\mathcal{F}_{\mathbf{j}})|\mathcal{F}_{\mathbf{i}}) = \mathrm{E}(X|\mathcal{F}_{\mathbf{i}\wedge\mathbf{j}}).$$

Přirozená filtrace pro bernoulliovská pole je komutující.

PI za Maxwellovy-Woodroofeovy a Hannanovy podmínky

Wang a Woodroofe (2013)

CLV a PI pro stac. náh. pole za zobecněné Maxwellovy-Woodroofeovy podmínky při sčítání přes vícerozměrné kvádry. MW podmínka:

$$\sum_{\mathbf{k}\in \boldsymbol{N}^d} \frac{\|\mathsf{E}(X_{\mathbf{k}}|\mathcal{F}_{\mathbf{1}})\|_2}{\Pi_{i=1}^d \sqrt{k_i}} < \infty.$$

Volný a Wang (2014)

Jako WW (2013) ale za Hannanovy podmínky:

$$\sum_{\mathbf{i}\in \boldsymbol{Z}^d} \|P_{\mathbf{0}} X_{\mathbf{i}}\|_2 < \infty.$$

Sčítání přes obecné množiny

El Machkouri, Volný, Wang (2013)

CLV a PI pro stac. náh. pole za zobecněné podmínky p- stability (míra fyzické závislosti) – při sčítání přes obecné množiny.
Předp. $X_{\mathbf{i}} = g(\varepsilon_{\mathbf{i}-\mathbf{j}}; \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d)$, $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d$ a $(\varepsilon_{\mathbf{i}}^{'})_{\mathbf{i}}$ iid kopii $(\varepsilon_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}}$. Potom $X_{\mathbf{i}}^*$ je verze $X_{\mathbf{i}}$ taková, že $X_i^* = g(\varepsilon_{\mathbf{i}-\mathbf{j}}^*; \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d)$, $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d$, kde $\varepsilon_{\mathbf{i}}^* = \varepsilon_{\mathbf{i}}$ pro všechna $\mathbf{i} \neq \mathbf{0}$ a $\varepsilon_{\mathbf{0}}^* = \varepsilon_{\mathbf{0}}^{'}$.

$$\delta_{i,p} = ||X_{\mathbf{i}} - X_{\mathbf{i}}^*||_p,$$

$$\Delta_p = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d} \delta_{\mathbf{i},p}.$$

Sčítání přes obecné množiny

K., Volný a Wang (2016)

CLV a PI za Hannanovy podmínky pro sčítání přes obecné množiny:

$$\sum_{\mathbf{i} \in \boldsymbol{Z}^d} \|P_{\mathbf{0}} X_{\mathbf{i}}\|_p < \infty.$$

Tato podmínka je slabší než podmínka na p-stabilitu.

Bez podmínky nezávislosti

Dosud uvedené výsledky založené na využití orthomartingalů jsou obecnější než předchozí výsledky založené na marting. aproximacích ve smyslu aproximace, ale na druhou stranu, požadují, aby náhodné pole $(\varepsilon_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}}$ bylo bernoulliovské, tj. pole nezávislých náhodných veličin. (V původních výsledcích postačovala stacionarita.)

Volný (2015), Cuny, Dedecker, Volný (2015)

CLV a PI pro komutující stacionární pole martingalových diferencí bez podmínky bernoulliovskosti; postačuje, aby alespoň jedno z marginálních T bylo ergodické.

U-statistiky založené na náhodných polích

Zobecnění výsledků Hsinga a Wua (2004).

K – symetrická měřitelná funkce $K : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, potom váženou U-statistiku definujeme následovně:

$$U_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{i}, \mathbf{j} \leq \mathbf{n}-\mathbf{1}} w_{\mathbf{i}-\mathbf{j}} K(X_{\mathbf{i}}, X_{\mathbf{j}}),$$

kde $w_{\mathbf{k}}$ jsou konstantní symetrické váhy.

PI pro U-statistiky

Položme $Y_{\mathbf{i},\mathbf{j}} = K(X_{\mathbf{i}}, X_{\mathbf{j}}) - \mathsf{E}K(X_{\mathbf{i}}, X_{\mathbf{j}})$.

K. (2016)

Předpokládejme, že

$$\sum_{\mathbf{k}\in Z^d} \sum_{\mathbf{i}\in Z^d} |w_{\mathbf{k}}| \| P_{\mathbf{0}}(Y_{\mathbf{i},\mathbf{i}-\mathbf{k}}) \|_2 < \infty.$$

Potom

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{n}\|}} \sum_{\mathbf{0}\leq \mathbf{i},\mathbf{j} \leq \lfloor (\mathbf{n}-\mathbf{1})\mathbf{t} \rfloor} w_{\mathbf{i}-\mathbf{j}} Y_{\mathbf{i},\mathbf{j}} \right)_{\mathbf{t}\in[\mathbf{0},\mathbf{1}]} \to (\sigma \mathrm{B}(\mathbf{t}))_{\mathbf{t}\in[\mathbf{0},\mathbf{1}]}$$

v prostoru $D[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, kde $(\mathrm{B}(\mathbf{t}))_{\mathbf{t}\in[\mathbf{0},\mathbf{1}]}$ je standardní Wienerovo pole a $\sigma^2 < \infty$.

Literatura

- El Machkouri, M., Volný, D., Wu, W. B. (2013). A central limit theorem for stationary random fields. *Stochastic Processes and their Applications*, **123(1)**.
- Klicnarová, J., Volný, D., Wang, Y. (2016). Limit theorems for weighted Bernoulli random fields under Hannan's condition. *Stochastic Processes and their Applications*, **126(6)**.
- Khoshnevisan, D. (2002). *Multiparameter processes: an introduction to random fields.* Springer.
- Volný, D., Wang, Y. (2014). An invariance principle for stationary random fields under Hannan's condition. *Stochastic Processes and their Applications*.
- Wang, Y., Woodroofe, M. (2013). A new condition on invariance principles for stationary random fields. *Statist. Sinica*, **23(4)**.