

Hĺbka dát v konvexnej geometrii

Stanislav Nagy

Univerzita Karlova v Praze
Katedra pravdepodobnosti a matematické statistiky

KU Leuven
Dept. of Mathematics

Jeseníky 2016

This work was supported by Research Foundation - Flanders (FWO-Vlaanderen)

Prehľad

1 Hĺbka dát

- Polopriestorová hĺbka
- Vybrané vlastnosti a problémy

2 Plávajúce telesá

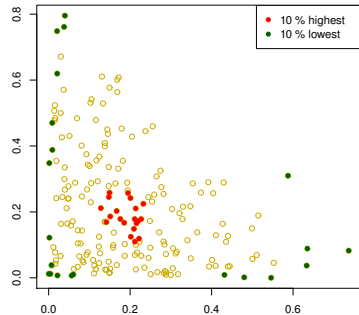
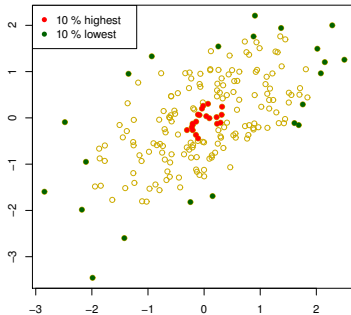
- Motivácia: Grünbaumova nerovnosť
- (Konvexné) plávajúce telesá a ich vlastnosti
- Busemann-Pettyho problém

3 Aplikácia: Iluminačné telesá v štatistike

Hĺbka dát

Pre náhodnú veličinu $X \sim P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ uvažujme hĺbku bodu $x \in \mathbb{R}^d$ vzhľadom k P

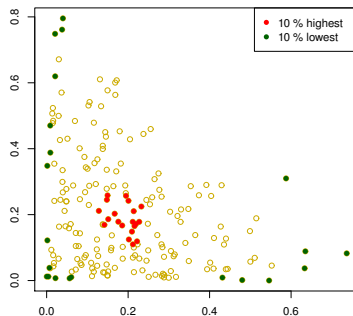
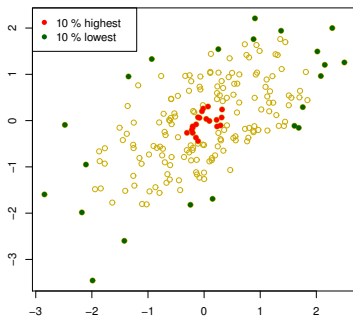
$$D: \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, 1]: (x, P) \mapsto D(x, P).$$



Polopriestorová hĺbka

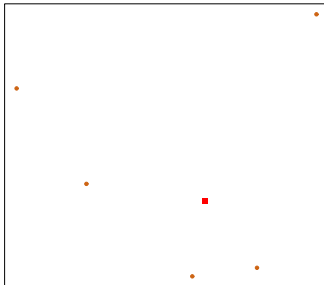
Polopriestorová hĺbka (Tukey, 1975) pozorovania v $\mathbb{R}^d$

$$D(x; P) = \inf_{H \in \mathcal{H}(x)} P(H).$$



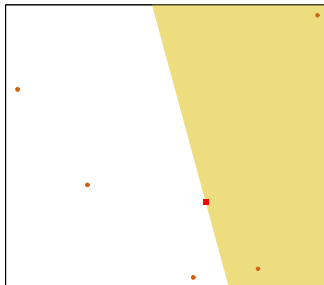
Polopriestorová hĺbka

$$D(x; P_n) = \min \frac{\# \text{ pozorovaní v polopriestore obsahujúcom } x}{n}$$



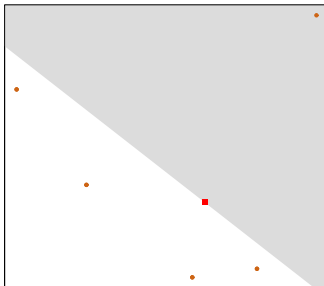
Polopriestorová hĺbka

$$D(x; P_n) = \min \frac{\# \text{ pozorovaní v polopriestore obsahujúcom } x}{n}$$



Polopriestorová hĺbka

$$D(x; P_n) = \min \frac{\# \text{ pozorovaní v polopriestore obsahujúcom } x}{n}$$



Hĺbka: teória

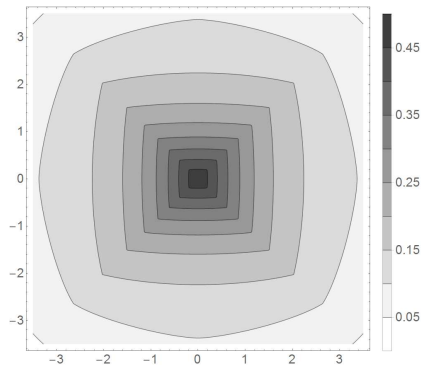
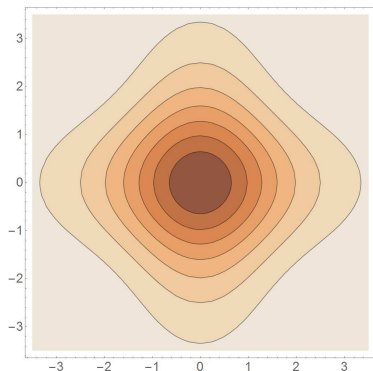
Teoretické vlastnosti D :

- **afínna invariancia** a konzistencia (Donoho a Gasko, 1992),
- **kvázikonkavita** a populačné vlastnosti (Massé a Theodorescu, 1994; Rousseeuw a Ruts, 1999),
- asymptotika a konvergencia kontúr (He a Wang, 1997; Kim, 2000),
- robustnosť (Romanazzi, 2001),
- **asymptotická normalita** (Massé, 2004),
- algoritmy, testy, odhady, aplikácie...

Hĺbka: kvázikonkavita

D je vždy **kvázikonkávna**, t.j. pre každé $c \in [0, 1]$

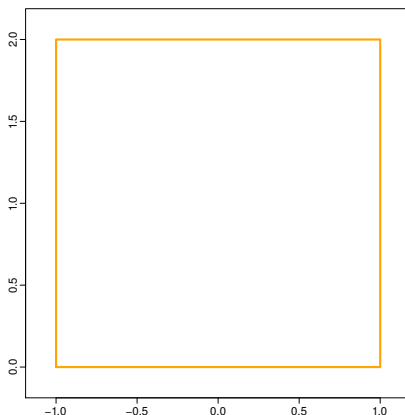
$\{x \in \mathbb{R}^d : D(x; P) \geq c\}$ je konvexná množina



Hĺbka: kvázikonkavita

D je vždy **kvázikonkávna**, t.j. pre každé $c \in [0, 1]$

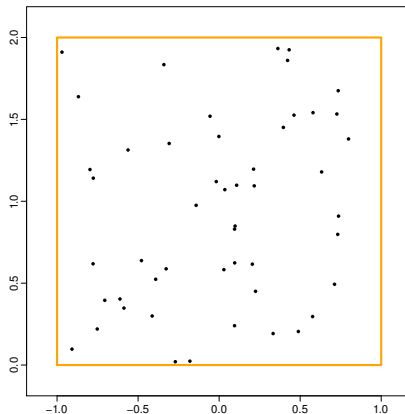
$\{x \in \mathbb{R}^d : D(x; P) \geq c\}$ je konvexná množina



Hĺbka: kvázikonkavita

D je vždy **kvázikonkávna**, t.j. pre každé $c \in [0, 1]$

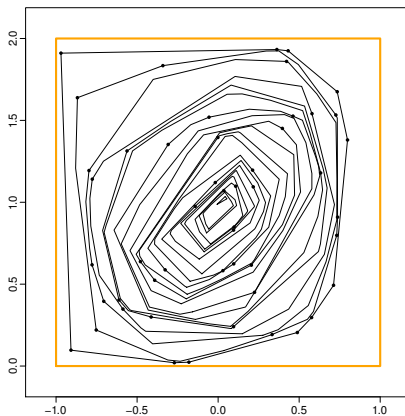
$\{x \in \mathbb{R}^d : D(x; P) \geq c\}$ je konvexná množina



Hĺbka: kvázikonkavita

D je vždy **kvázikonkávna**, t.j. pre každé $c \in [0, 1]$

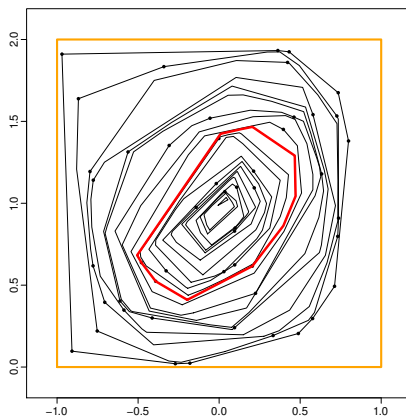
$\{x \in \mathbb{R}^d : D(x; P) \geq c\}$ je konvexná množina



Hĺbka: kvázikonkavita

D je vždy **kvázikonkávna**, t.j. pre každé $c \in [0, 1]$

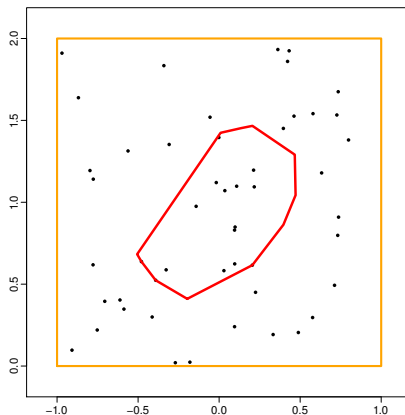
$\{x \in \mathbb{R}^d : D(x; P) \geq c\}$ je konvexná množina



Hĺbka: úrovňové množiny

D je vždy **kvázikonkávna**, t.j. pre každé $c \in [0, 1]$

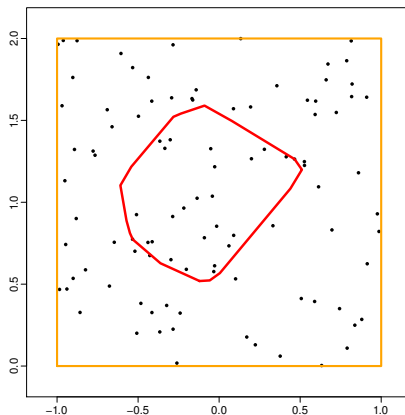
$\{x \in \mathbb{R}^d : D(x; P) \geq c\}$ je konvexná množina



Hĺbka: úrovňové množiny

D je vždy **kvázikonkávna**, t.j. pre každé $c \in [0, 1]$

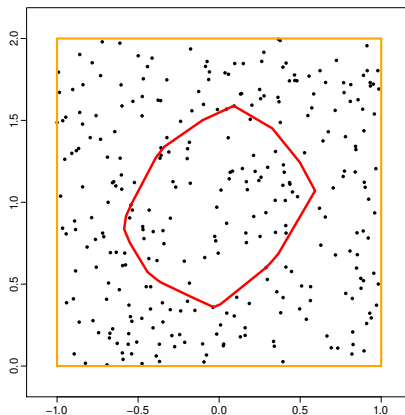
$\{x \in \mathbb{R}^d : D(x; P) \geq c\}$ je konvexná množina



Hĺbka: úrovňové množiny

D je vždy **kvázikonkávna**, t.j. pre každé $c \in [0, 1]$

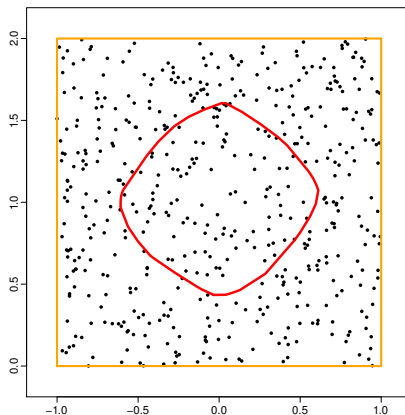
$\{x \in \mathbb{R}^d : D(x; P) \geq c\}$ je konvexná množina



Hĺbka: úrovňové množiny

D je vždy **kvázikonkávna**, t.j. pre každé $c \in [0, 1]$

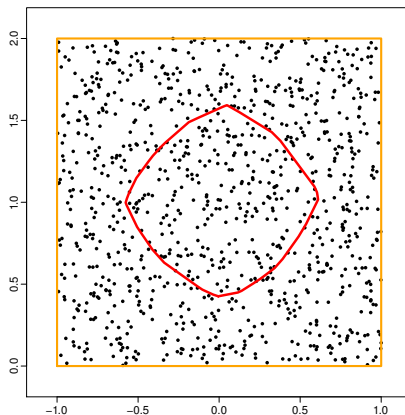
$\{x \in \mathbb{R}^d : D(x; P) \geq c\}$ je konvexná množina



Hĺbka: úrovňové množiny

D je vždy **kvázikonkávna**, t.j. pre každé $c \in [0, 1]$

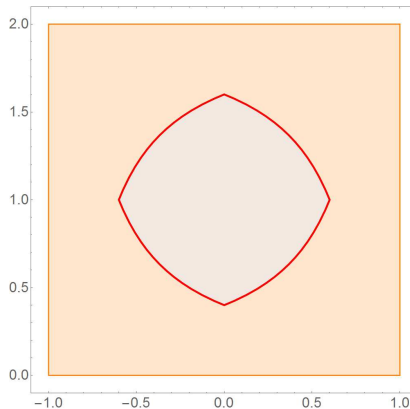
$\{x \in \mathbb{R}^d : D(x; P) \geq c\}$ je konvexná množina



Hĺbka: úrovňové množiny

Platí

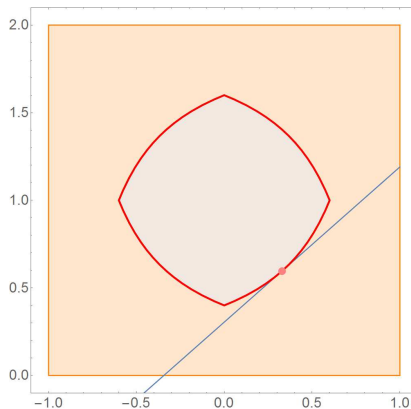
$$\{x \in \mathbb{R}^d : D(x; P) \geq c\} = \bigcap \{H \in \mathcal{H} : P(H) \geq 1 - c\}$$



Hĺbka: asymptotická normalita

$\sqrt{n}D(x; P_n)$ je **asymptoticky normálne**

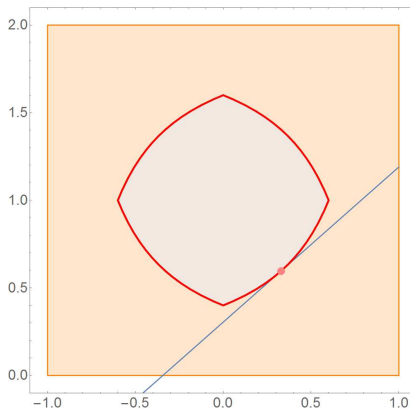
$\iff D(x; P)$ realizuje **jediný polopriestor** $H \in \mathcal{H}$ (Massé, 2004)



Hĺbka: asymptotická normalita

$\sqrt{n}D(x; P_n)$ je **asymptoticky normálne**

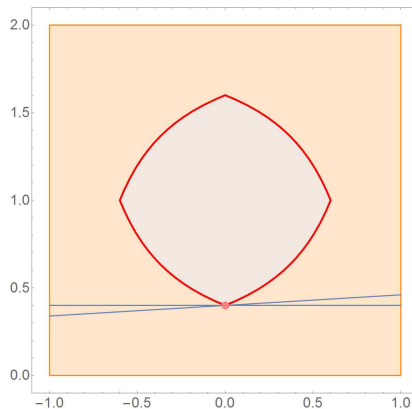
$\iff$ kontúra $D(\cdot; P)$ je v x **hladká** (Gijbels a Nagy, 2016)



Hĺbka: asymptotická normalita

$\sqrt{n}D(x; P_n)$ je **asymptoticky normálne**

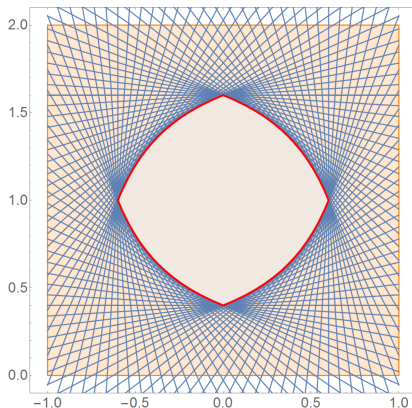
$\iff$ kontúra $D(\cdot; P)$ je v x **hladká** (Gijbels a Nagy, 2016)



Hĺbka: asymptotická normalita

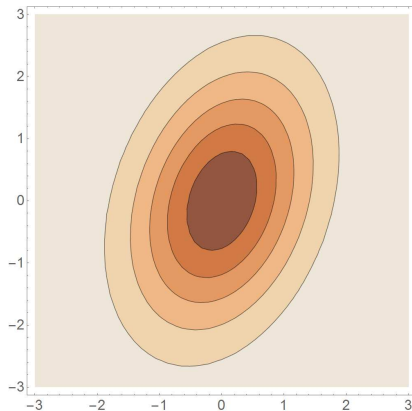
$\sqrt{n}D(x; P_n)$ je **asymptoticky normálne**

$\iff$ kontúra $D(\cdot; P)$ je v x **hladká** (Gijbels a Nagy, 2016)



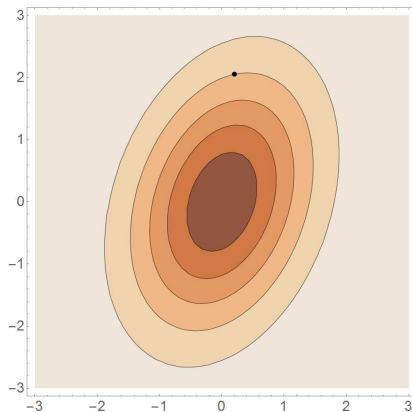
Problém: hladkosť hĺbky

Elipticky symetrické rozdelenia:



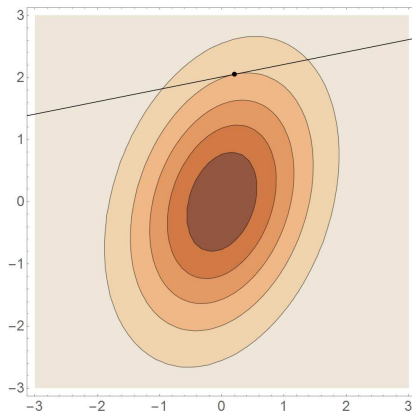
Problém: hladkosť hĺbky

Elipticky symetrické rozdelenia:



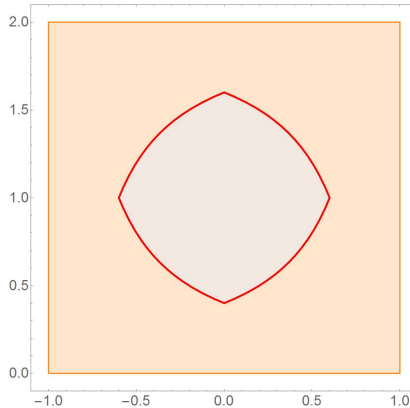
Problém: hladkosť hĺbky

Elipticky symetrické rozdelenia:



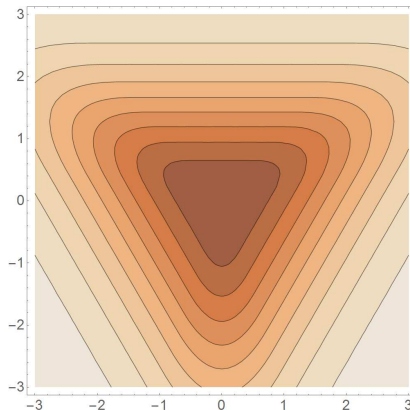
Problém: hladkosť hĺbky

Rozdelenie **bez hladkých kontúr** (Gijbels a Nagy, 2016):



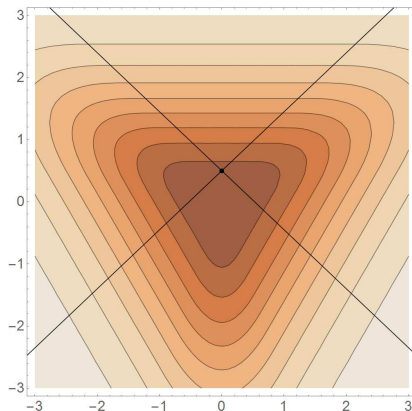
Problém: hladkosť hĺbky

Rozdelenie **bez hladkých kontúr** (Gijbels a Nagy, 2016):



Problém: hladkosť hĺbky

Rozdelenie **bez hladkých kontúr** (Gijbels a Nagy, 2016):



Problém: hladkosť hĺbky

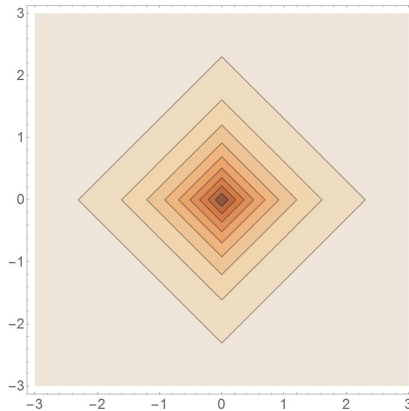
Problém (Massé a Theodorescu, 1994)

(P1): Existuje neeliptické rozdelenie s hladkými kontúrami hĺbky?

Problém: hĺbka mediánu

P je **polopriestorovo symetrické** (Zuo a Serfling, 2000) ak

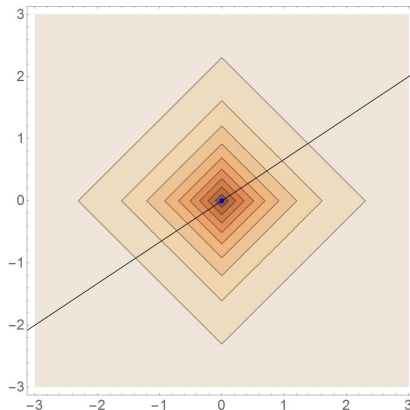
$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} D(x; P) \geq 0.5$$



Problém: hĺbka mediánu

P je **polopriestorovo symetrické** (Zuo a Serfling, 2000) ak

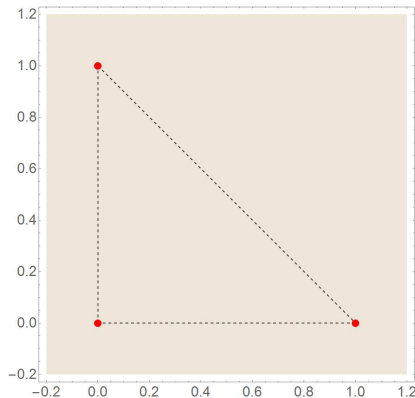
$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} D(x; P) \geq 0.5$$



Problém: hĺbka mediánu

Pre P na vrcholoch simplexu v $\mathbb{R}^d$ vždy (Donoho a Gasko, 1992)

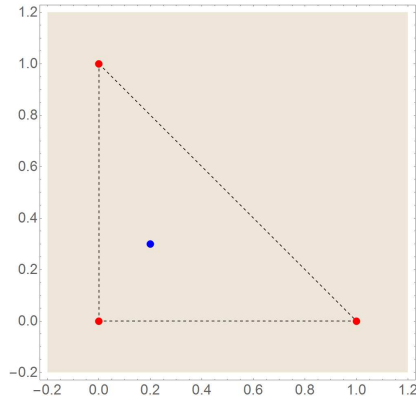
$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} D(x; P) \leq (d+1)^{-1} \xrightarrow{d \rightarrow \infty} 0$$



Problém: hĺbka mediánu

Pre P na vrcholoch simplexu v $\mathbb{R}^d$ vždy (Donoho a Gasko, 1992)

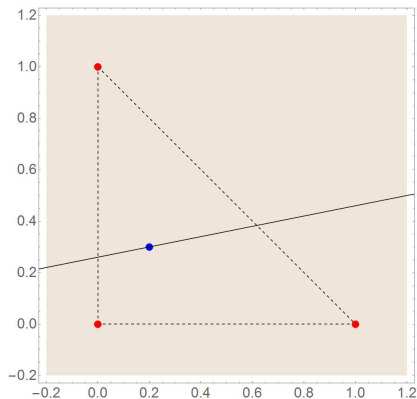
$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} D(x; P) \leq (d+1)^{-1} \xrightarrow{d \rightarrow \infty} 0$$



Problém: hĺbka mediánu

Pre P na vrcholoch simplexu v $\mathbb{R}^d$ vždy (Donoho a Gasko, 1992)

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} D(x; P) \leq (d+1)^{-1} \xrightarrow{d \rightarrow \infty} 0$$



Problém: hĺbka mediánu

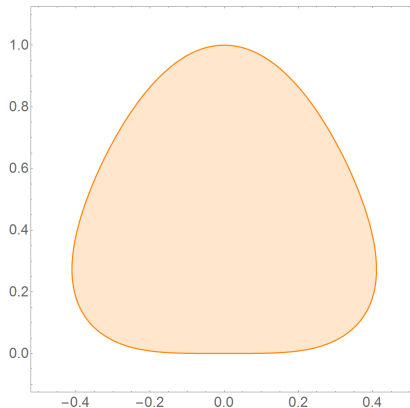
Problém (Donoho a Gasko, 1992)

(P2): Maximálna hodnota hĺbky leží v intervale $[1/(d+1), 1/2]$.

Dokážeme povedať viac?

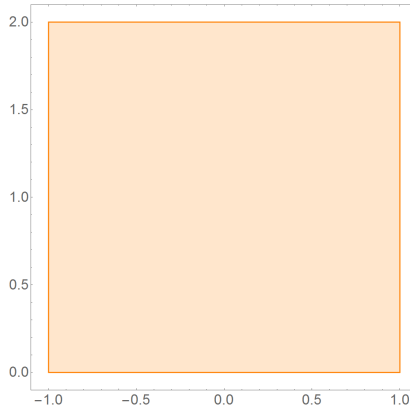
Štatistika konvexných telies

Konvexné teleso je ľubovoľná **neprázdna, kompaktná a konvexná** množina $K \subset \mathbb{R}^d$ (Webster, 1994; Schneider, 2014).



Štatistika konvexných telies

Konvexné teleso je ľubovoľná **neprázdna, kompaktná a konvexná** množina $K \subset \mathbb{R}^d$ (Webster, 1994; Schneider, 2014).

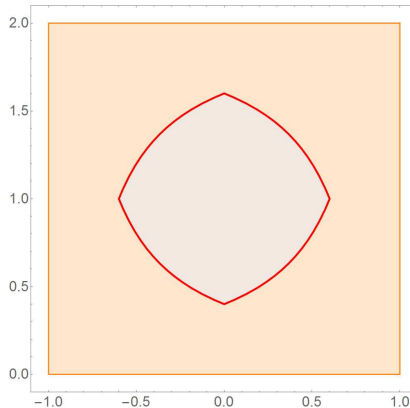


Štatistika konvexných telies



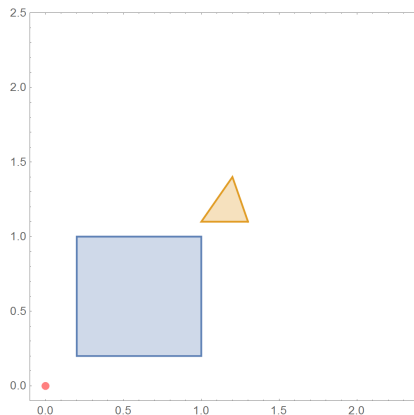
Hĺbka konvexných telies

Populačná verzia hĺbky konvexného telesa K



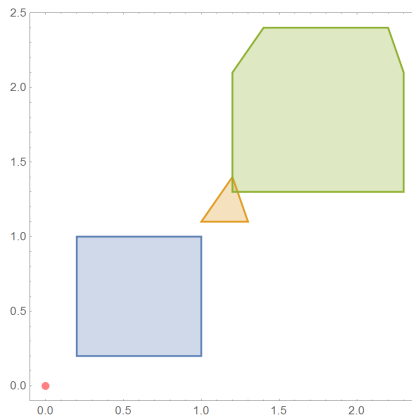
Kalkulus konvexných telies

$$K + L = \{x + y : x \in K, y \in L\}, \quad \lambda K = \{\lambda x : x \in K\}$$



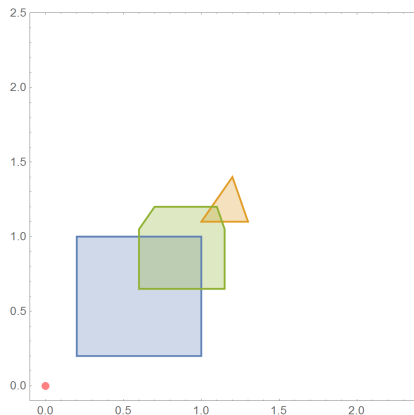
Kalkulus konvexných telies

$$K + L = \{x + y : x \in K, y \in L\}, \quad \lambda K = \{\lambda x : x \in K\}$$



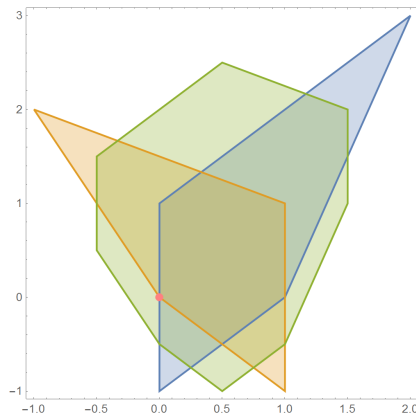
Kalkulus konvexných telies

$$K + L = \{x + y : x \in K, y \in L\}, \quad \lambda K = \{\lambda x : x \in K\}$$



Kalkulus konvexných telies

$$K + L = \{x + y : x \in K, y \in L\}, \quad \lambda K = \{\lambda x : x \in K\}$$



Motivácia: Brunn-Minkowského nerovnosť

$$K + L = \{x + y : x \in K, y \in L\}, \quad \lambda K = \{\lambda x : x \in K\}$$

Tvrdenie (Brunn, 1887; Minkowski 1896)

Nech $K, L \subset \mathbb{R}^d$ sú konvexné telesá, $\text{vol}(K) = \text{vol}(L) = 1$. Potom $\text{vol}((K + L)/2) \geq 1$, s rovnosťou práve ak K je posunutím L .

Motivácia: Brunn-Minkowského nerovnosť

Ekvivalentné formulácie tvrdenia ($\lambda \in [0, 1]$):

- Funkcia $K \mapsto \text{vol}(K)^{1/d}$ je konvexná.
- $\text{vol}((1 - \lambda)K + \lambda L)^{1/d} \geq (1 - \lambda)\text{vol}(K)^{1/d} + \lambda\text{vol}(L)^{1/d}$.
- $\text{vol}((1 - \lambda)K + \lambda L) \geq \min\{\text{vol}(K), \text{vol}(L)\}$.
- $\text{vol}((1 - \lambda)K + \lambda L) \geq \text{vol}(K)^{1-\lambda} \text{vol}(L)^\lambda$.

Motivácia: Grünbaumova nerovnosť

Tvrdenie (Grünbaum, 1960)

Nech $K \subset \mathbb{R}^d$ je konvexné teleso, $\text{vol}(K) = 1$. Potom existuje bod $x \in K$ taký že

$$D(x; K) \geq \left(\frac{d}{d+1} \right)^d.$$

Motivácia: Grünbaumova nerovnosť

Tvrdenie (Grünbaum, 1960)

Nech $K \subset \mathbb{R}^d$ je konvexné teleso, $\text{vol}(K) = 1$. Potom existuje bod $x \in K$ taký že

$$D(x; K) \geq \left(\frac{d}{d+1} \right)^d.$$

- Grünbaum dokazuje silnejšie tvrdenie: veta platí pre $x = E K$.
- $\lim_{d \rightarrow \infty} \left(\frac{d}{d+1} \right)^d = \exp(-1) \approx 0.37$.

APPLICATIONS
DE GÉOMÉTRIE
ET
DE MÉCANIQUE;

A LA MARINE, AUX PONTS ET CHAUSSÉES, ETC.,

POUR FAIRE SUITE

AUX DÉVELOPPEMENTS DE GÉOMÉTRIE,

PAR CHARLES DUPIN,

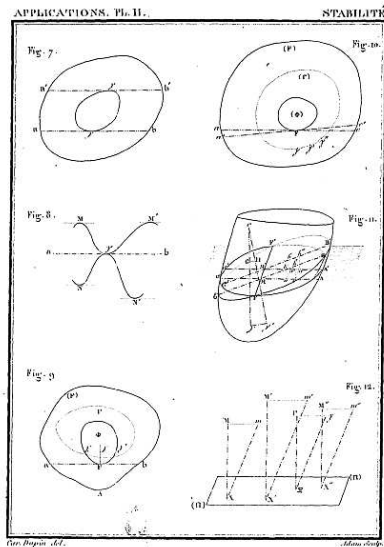
Membre de l'Institut de France, Académie des Sciences; ancien Secrétaire de l'Académie
Insulienne, Associé étranger de l'Institut de Naples, Associé honoraire de l'Académie
royale d'Irlande, et de la Société des Ingénieurs civils de la Grande-Bretagne, Membre
des Académies royales des Sciences de Stockholm, de Turin, de Montpellier, etc., de la
Société des Arts de Genève, de la Société d'Encouragement pour l'industrie française,
Membre du Comité consultatif des Arts et Manufactures de France, Professeur de Mé-
canique au Conservatoire, Officier supérieur au corps du Génie Maritime, et Membre
de la Légion d'Honneur.



PARIS,

BACHELIER, SUCCESSION DE M^{me}. V^e. COURCIER, LIBRAIRE,
QUAI DES AUGUSTINS.

1822.



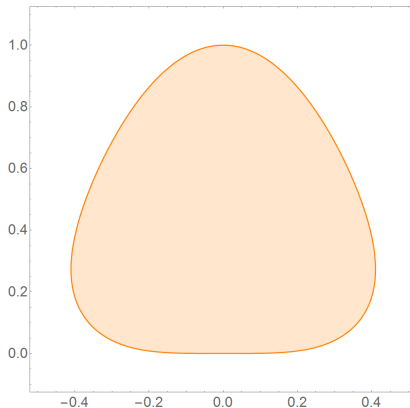
Plávajúce teleso

Definícia (Dupin, 1822)

Konvexné teleso $K_{[\delta]}$ nazývame **plávajúcim telesom** konvexného telesa $K \subset \mathbb{R}^d$, ak $\delta \in [0, \text{vol}(K)/2]$ a každá oporná nadrovina $K_{[\delta]}$ vysekáva z K množinu o objeme δ .

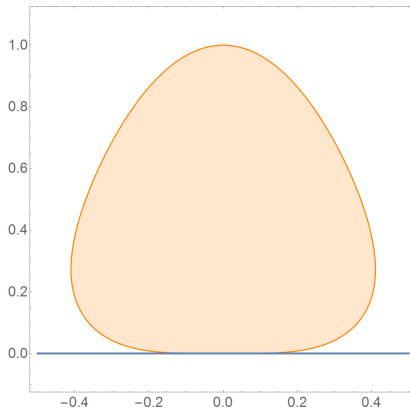
Plávajúce teleso

Plávajúce teleso K pre $\delta = 0.3$



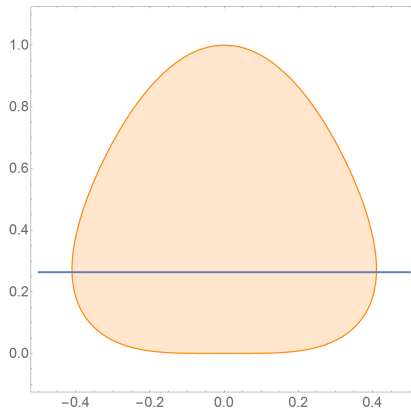
Plávajúce teleso

Plávajúce teleso K pre $\delta = 0.3$



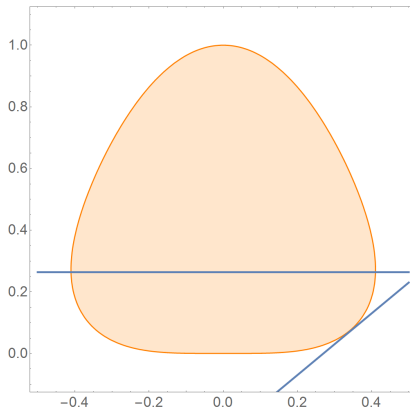
Plávajúce teleso

Plávajúce teleso K pre $\delta = 0.3$



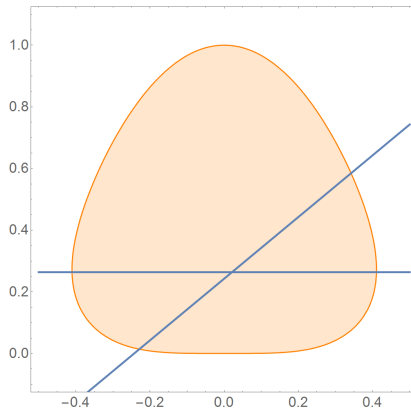
Plávajúce teleso

Plávajúce teleso K pre $\delta = 0.3$



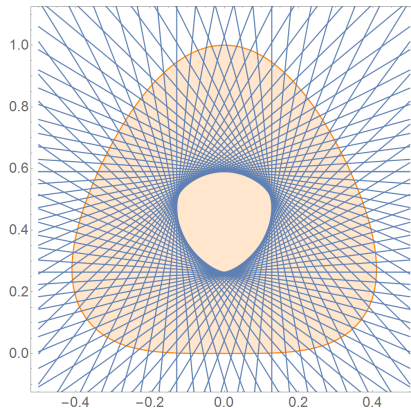
Plávajúce teleso

Plávajúce teleso K pre $\delta = 0.3$



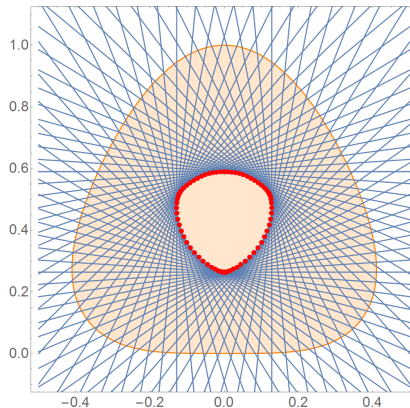
Plávajúce teleso

Plávajúce teleso K pre $\delta = 0.3$



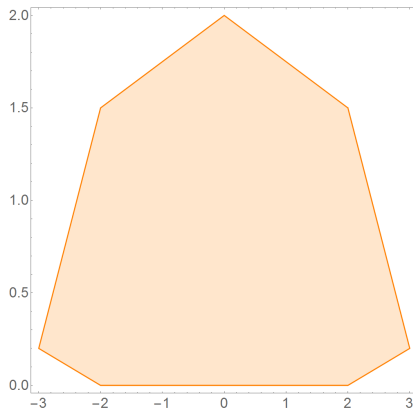
Plávajúce teleso

Plávajúce teleso K pre $\delta = 0.3$



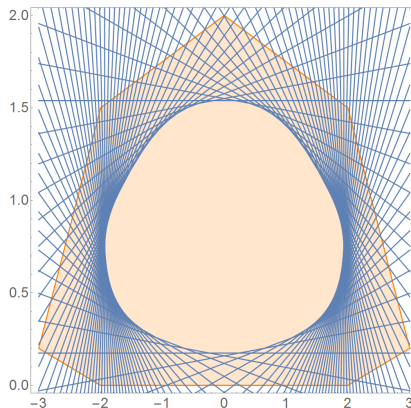
Plávajúce teleso

Plávajúce teleso K pre $\delta = 0.1$



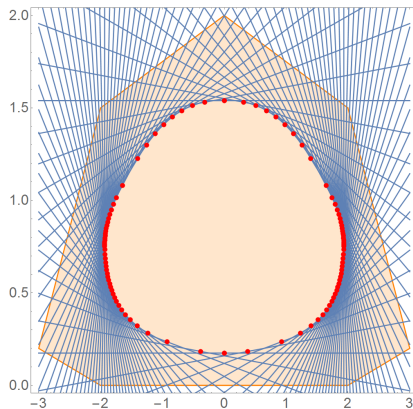
Plávajúce teleso

Plávajúce teleso K pre $\delta = 0.1$



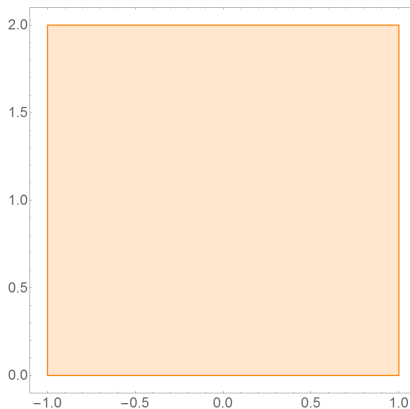
Plávajúce teleso

Plávajúce teleso K pre $\delta = 0.1$



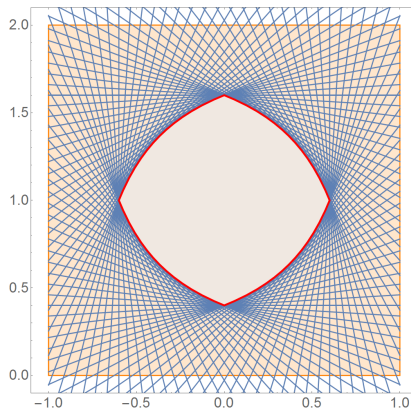
Plávajúce teleso

Plávajúce teleso K pre $\delta = 0.3$



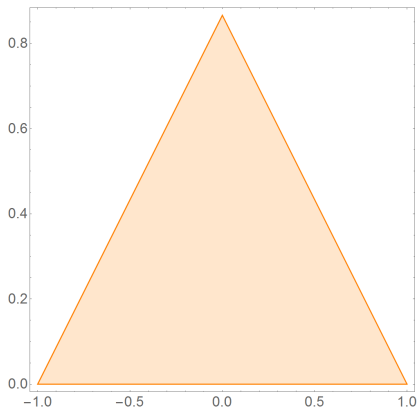
Plávajúce teleso

Plávajúce teleso K pre $\delta = 0.3$



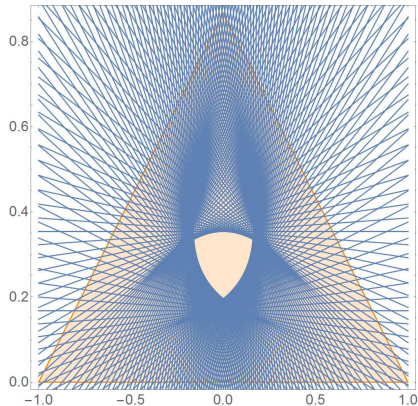
Plávajúce teleso

Plávajúce teleso K nemusí existovať!



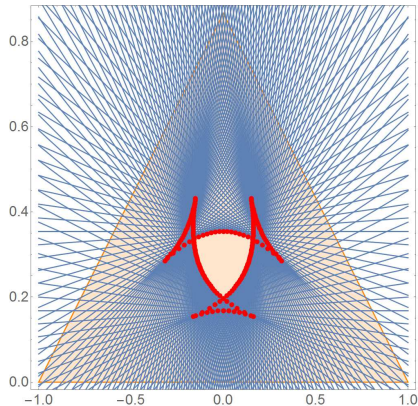
Plávajúce teleso

Plávajúce teleso K nemusí existovať!



Plávajúce teleso

Plávajúce teleso K **nemusí existovať!**



Afínna plocha povrchu konvexných telies

$$\Omega(K) = \int_{\partial K} \kappa(x)^{1/(d+1)} d\mu(x),$$

kde

- K je konvexné teleso **triedy** $\mathcal{C}_2^+$,
- ∂K je topologická **hranica** K ,
- κ je Gauss-Kroneckerova **krivosť** K , a
- μ je **miera** plochy povrchu K ($\approx d - 1$ -rozmerná Hausdorffova miera na ∂K).

Plávajúce teleso: Blaschkeho identita

Tvrdenie (Blaschke, 1923)

Ak pre malé δ existuje plávajúce teleso K , potom pre
 $c_d = 2(\kappa_{d-1}/(d+1))^{2/(d+1)}$

$$\Omega(K) = \lim_{\delta \rightarrow 0} c_d \frac{\text{vol}(K) - \text{vol}(K_{[\delta]})}{\delta^{2/(d+1)}}.$$

Konvexné plávajúce teleso

Definícia (Schütt a Werner, 1990)

Nech $K \subset \mathbb{R}^d$ je konvexné teleso a $\delta \in [0, \text{vol}(K)/2]$. **Konvexné plávajúce teleso** K príslušiacie δ je dané

$$K_\delta = \bigcap \{H \in \mathcal{H} : \text{vol}(K \cap H) \geq 1 - \delta\}.$$

Konvexné plávajúce teleso

Definícia (Schütt a Werner, 1990)

Nech $K \subset \mathbb{R}^d$ je konvexné teleso a $\delta \in [0, \text{vol}(K)/2]$. **Konvexné plávajúce teleso** K príslušiacie δ je dané

$$K_\delta = \bigcap \{H \in \mathcal{H} : \text{vol}(K \cap H) \geq 1 - \delta\}.$$

Konvexné plávajúce teleso

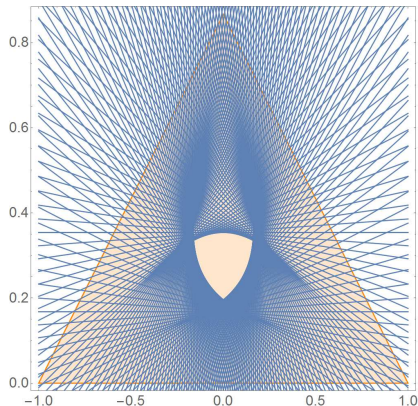
Tvrdenie (Schütt a Werner, 1990)

K_δ existuje vždy. Ak $K_{[\delta]}$ existuje, potom $K_{[\delta]} = K_\delta$. Navyše

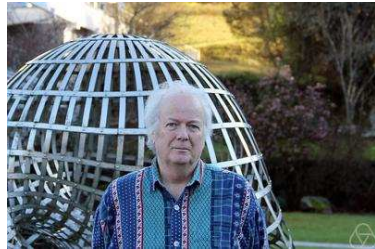
$$\Omega(K) = \lim_{\delta \rightarrow 0} c_d \frac{\text{vol}(K) - \text{vol}(K_\delta)}{\delta^{2/(d+1)}}.$$

Konvexné plávajúce teleso

Konvexné plávajúce teleso K existuje vždy!



Elisabeth Werner a Carsten Schütt



Bárány-Larmanove zobrazenie

Definícia (Bárány a Larman, 1988)

Pre konvexné teleso $K \subset \mathbb{R}^d$ a $x \in K$ definujeme zobrazenie

$$v(x) = \min \{ \text{vol}(K \cap H) : x \in H, H \in \mathcal{H} \}.$$

Podobné zobrazenia uvažujú už **Neumann (1945)**, **Rado (1946)**, **Grünbaum (1960)**, **Leichtweiß(1986)**, ...

Rado (1946) dokonca v $\mathbb{R}^2$ definuje v **pre “hustoty”**

$$f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty).$$

Fresen (2012) píše o **“mnohorozmerných kvantilochoch”** daných v pre všeobecné miery.

Grünbaumova nerovnosť

- Ak K je **konvexné teleso**, $D(E X; K) \geq \exp(-1)$ (Grünbaum, 1960);
- Ak $X \sim f$ pre f **kvázikonkávnu** s centrovanými úrovňovými množinami, $D(0; P) \geq \exp(-1)$;
- Rozšírenia pre **log-konkávne**, **κ -konkávne** a **kvázikonkávne miery** a hustoty (Ball, 1986, 1988; Caplin a Nalebuff, 1991; Bobkov 2003, 2010);
- dokonca **bez nutnosti existencie** $E X$ (Bobkov, 2010).

$\implies$ **(P2):** hĺbka mediánu je určená **mierou konkavity hustoty**

Grünbaumova nerovnosť

- Ak K je **konvexné teleso**, $D(E X; K) \geq \exp(-1)$ (Grünbaum, 1960);
- Ak $X \sim f$ pre f **kvázikonkávnu** s centrovanými úrovňovými množinami, $D(0; P) \geq \exp(-1)$;
- Rozšírenia pre **log-konkávne**, **κ -konkávne** a **kvázikonkávne miery** a hustoty (Ball, 1986, 1988; Caplin a Nalebuff, 1991; Bobkov 2003, 2010);
- dokonca **bez nutnosti existencie** $E X$ (Bobkov, 2010).

$\implies$ **(P2):** hĺbka mediánu je určená **mierou konkavity hustoty**

$\stackrel{?}{\implies}$ polopriestorová hĺbka v **nekonečnerozmerných priestoroch?**
(Dutta et al., 2010)

Hladkosť plávajúcich telies

Tvrdenie (Meyer a Reisner, 1991)

Nech K je symetrické konvexné teleso. Potom

- *K_δ je symetrické a striktne konvexné,*
- *ak K je hladké a striktne konvexné, K_δ je C_2^+ .*

$\implies$ **(P1):** rovnomerné rozdelenia na symetrických striktne konvexných množinách majú **hladkú hĺbku**.

Hladkosť plávajúcich telies

Tvrdenie (Meyer a Reisner, 1991)

Nech K je symetrické konvexné teleso. Potom

- K_δ je symetrické a striktne konvexné,
- ak K je hladké a striktne konvexné, K_δ je C_2^+ .

$\implies$ **(P1):** rovnomerné rozdelenia na symetrických striktne konvexných množinách majú **hladkú hĺbku**.

$\stackrel{?}{\implies}$ pre **0-symetrické striktne kvazikonkávne** hustoty je D asymptoticky normálna pre každé $x \neq 0$.

Busemann-Pettyho problém

Problém (Busemann a Petty, 1956)

Nech $K, L \subset \mathbb{R}^d$ sú 0-symetrické konvexné telesá také že

$$\text{vol}_{d-1}(K \cap u^\perp) \leq \text{vol}_{d-1}(L \cap u^\perp) \quad \text{pre každé } u \in \mathbb{R}^d, u \neq 0.$$

Platí potom

$$\text{vol}(K) \leq \text{vol}(L)?$$

Busemann-Pettyho problém

Problém (Busemann a Petty, 1956)

Nech $K, L \subset \mathbb{R}^d$ sú 0-symetrické konvexné telesá také že

$$\text{vol}_{d-1}(K \cap u^\perp) \leq \text{vol}_{d-1}(L \cap u^\perp) \quad \text{pre každé } u \in \mathbb{R}^d, u \neq 0.$$

Platí potom

$$\text{vol}(K) \leq \text{vol}(L)?$$

Áno, ale iba pre $d < 5!$ (Gardner et al., 1999)

Busemann-Pettyho problém

Problém (Milman a Pajor, 1989)

Nech $K, L \subset \mathbb{R}^d$ sú 0-symetrické konvexné telesá také že

$$\text{vol}_{d-1}(K \cap u^\perp) \leq \text{vol}_{d-1}(L \cap u^\perp) \quad \text{pre každé } u \in \mathbb{R}^d, u \neq 0.$$

Existuje potom $c > 1$ tak že

$$\text{vol}(K) \leq c \text{vol}(L)?$$

Pre najlepšie známe odhady $c(d) \xrightarrow{d \rightarrow \infty} \infty$. (Klartag, 2007)

Busemann-Pettyho problém a plávajúce telesá

Tvrdenie (Fresen, 2012)

Pre každé konvexné teleso $K \subset \mathbb{R}^d$ a $\delta \in (0, \exp(-1))$

$$a_1 \frac{\exp(-1) - \delta}{\sqrt{d}} C_I \leq \left(\frac{\text{vol}(K_\delta)}{\text{vol}(K)} \right)^{1/d} \leq a_2 \frac{\log(\delta^{-1})}{\sqrt{d}} C_I,$$

kde a_1, a_2 sú kladné univerzálne konštanty a C_I je tzv **izotropická konštantá**.

$C_I \in \mathbb{R} \iff$ platí Milman-Pajorova hypotéza.

Busemann-Pettyho problém a plávajúce telesá

Tvrdenie (Milman a Pajor, 1989; Fresen, 2012)

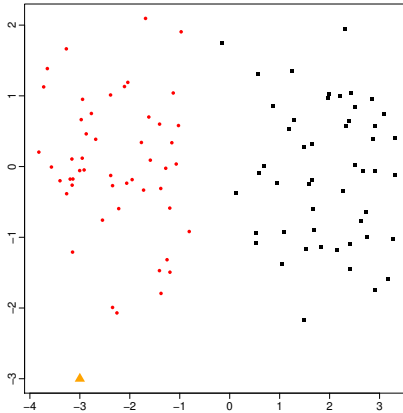
Nech Milman-Pajorova hypotéza platí. Potom existuje elipsoid $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^d$ závislý iba na K tak že

$$C_I(\exp(-1) - \delta)\mathcal{E} \subseteq K_\delta \subseteq C_I 17 \log(\delta^{-1})\mathcal{E},$$

kde C_I je izotropická konštanta.

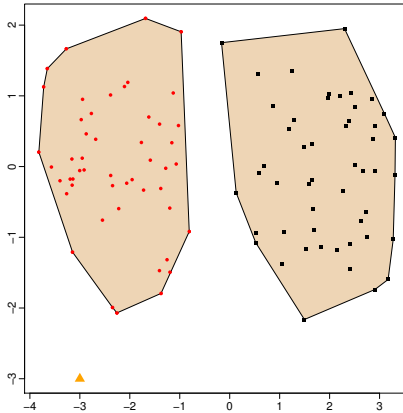
Problém: klasifikácia

Pre $X \sim P_1$, $Y \sim P_2$ a $x \sim P_i$, $i \in \{1, 2\}$ neznáme, nájdí i .



Problém: klasifikácia

Pre $X \sim P_1$, $Y \sim P_2$ a $x \sim P_i$, $i \in \{1, 2\}$ neznáme, nájdí i .



Iluminačné teleso

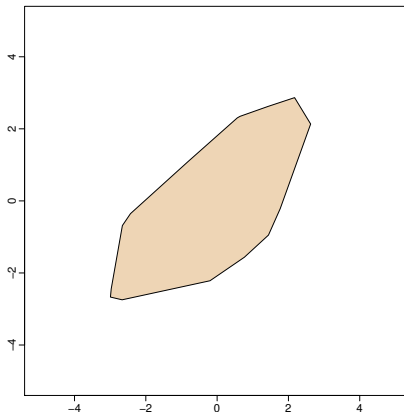
Definícia (Werner, 1994)

Nech $K \subset \mathbb{R}^d$ je konvexné teleso a $\delta > 0$. **Iluminačné teleso** K príslušiace δ je dané

$$K^\delta = \{x \in \mathbb{R}^d : \text{vol}(\text{co}(x, K)) \leq \text{vol}(K) + \delta\}.$$

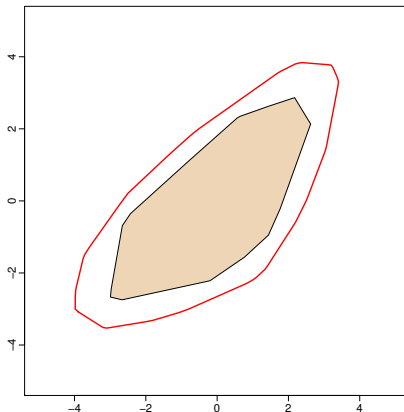
Iluminačné teleso

$$K^\delta = \{x \in \mathbb{R}^d : \text{vol}(\text{co}(x, K)) \leq \text{vol}(K) + \delta\}$$



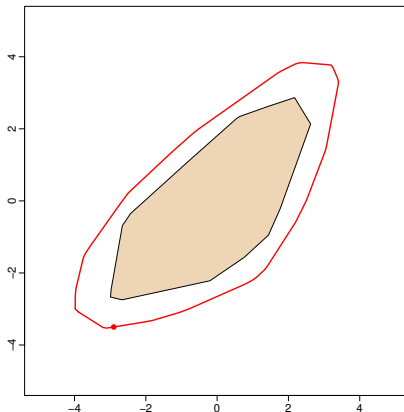
Iluminačné teleso

$$K^\delta = \{x \in \mathbb{R}^d : \text{vol}(\text{co}(x, K)) \leq \text{vol}(K) + \delta\}$$



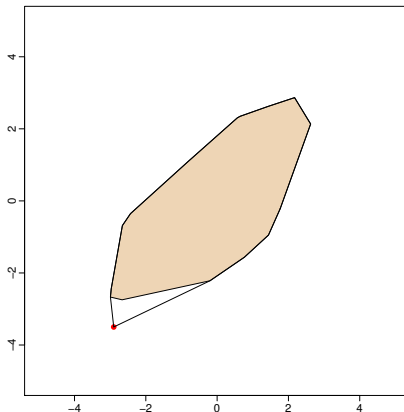
Iluminačné teleso

$$K^\delta = \{x \in \mathbb{R}^d : \text{vol}(\text{co}(x, K)) \leq \text{vol}(K) + \delta\}$$



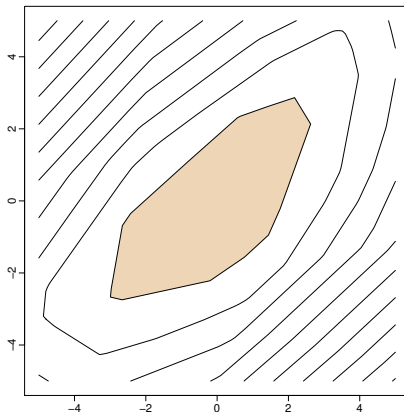
Iluminačné teleso

$$K^\delta = \{x \in \mathbb{R}^d : \text{vol}(\text{co}(x, K)) \leq \text{vol}(K) + \delta\}$$



Iluminačné teleso

$$K^\delta = \{x \in \mathbb{R}^d : \text{vol}(\text{co}(x, K)) \leq \text{vol}(K) + \delta\}$$



Iluminačné teleso: vlastnosti

Tvrdenie (Werner 1994, 2006)

Platí:

- $\{K^\delta\}_{\delta>0}$ tvorí **rastúci systém** do seba vnorených **konvexných** telies.
- Ak K je elipsoid, každé K^δ je **rovnako orientovaný elipsoid**.
- K^δ je **invariantné** vzhľadom k afinným zobrazeniam s jednotkovým determinantom.
- Existuje $b_d > 0$ tak že

$$\Omega(K) = \lim_{\delta \rightarrow 0} b_d \frac{\text{vol}(K^\delta) - \text{vol}(K)}{\delta^{2/(d+1)}}.$$

Iluminácia

Definícia

Nech $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ a $x \notin \text{co}(\text{Supp}(P))$. **Iluminácia** x vzhľadom k P je

$$\mathcal{I}(x; P) = \text{vol}(\text{co}(x, \text{Supp}(P))).$$

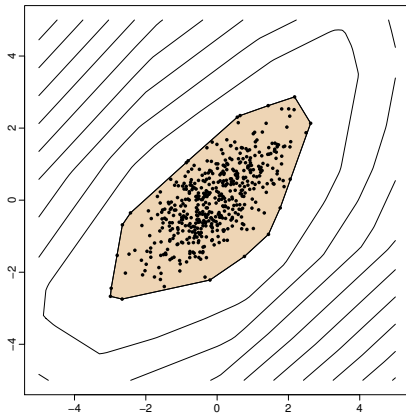
Pre $x, y \in \mathbb{R}^d$ také že

$$D(x; P) = D(y; P) = 0$$

vyhlásime x **hlbším** ako y ak $\mathcal{I}(x; P) < \mathcal{I}(y; P)$.

Iluminácia

$$\mathcal{I}(x; P) = \text{vol}(\text{co}(x, \text{Supp}(P)))$$



Robustná iluminácia

Definícia (Nagy, Schütt a Werner)

Nech $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$. **Robustná iluminácia** x vzhľadom k P je

$$\mathcal{I}(x; P) = \text{vol}(\text{co}(x, \{D(\cdot; P) \geq (D(x; P) + s)/2\})),$$

kde $s = \sup_{y \in \mathbb{R}^d} D(y; P)$.

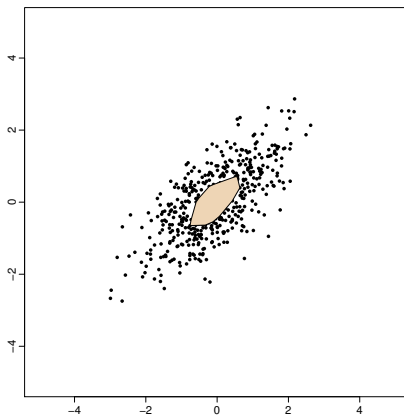
Pre $x, y \in \mathbb{R}^d$ také že

$$D(x; P) = D(y; P)$$

vyhlásime x **hlbším** ako y ak $\mathcal{I}(x; P) < \mathcal{I}(y; P)$.

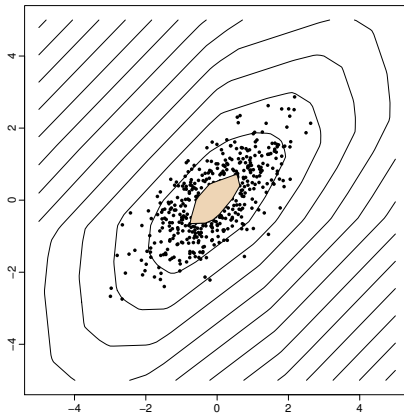
Robustná iluminácia

$$\mathcal{I}(x; P) = \text{vol}(\text{co}(x, \{D(\cdot; P) \geq (D(x; P) + s)/2\}))$$



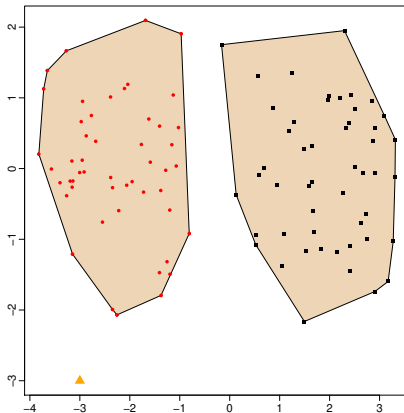
Robustná iluminácia

$$\mathcal{I}(x; P) = \text{vol}(\text{co}(x, \{D(\cdot; P) \geq (D(x; P) + s)/2\}))$$



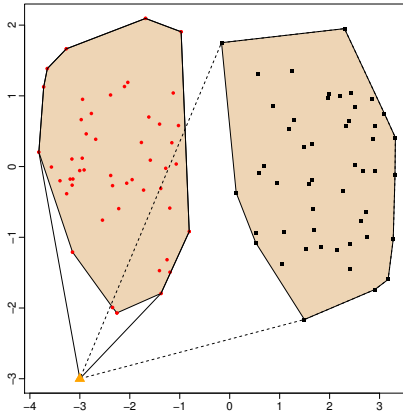
Príklad: klasifikácia

Pre $X \sim P_1$, $Y \sim P_2$ a $x \sim P_i$, $i \in \{1, 2\}$ neznáme, nájdí i .



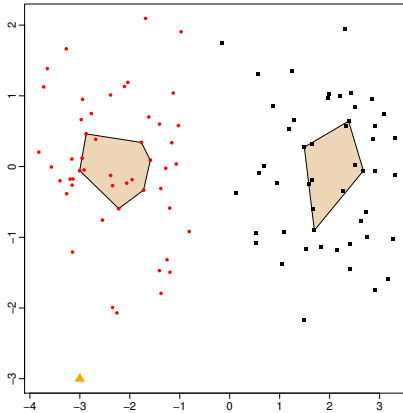
Príklad: klasifikácia

Pre $X \sim P_1$, $Y \sim P_2$ a $x \sim P_i$, $i \in \{1, 2\}$ neznáme, nájdí i .



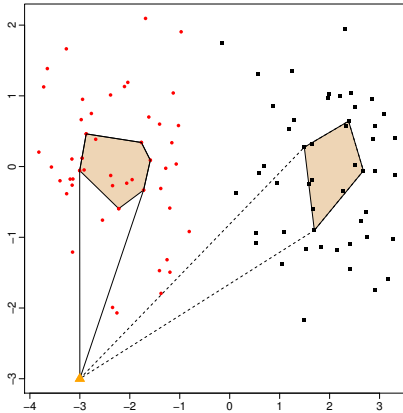
Príklad: klasifikácia

Pre $X \sim P_1$, $Y \sim P_2$ a $x \sim P_i$, $i \in \{1, 2\}$ neznáme, nájdí i .



Príklad: klasifikácia

Pre $X \sim P_1$, $Y \sim P_2$ a $x \sim P_i$, $i \in \{1, 2\}$ neznáme, nájdí i .



Iluminácia: vlastnosti

Iluminácia má radu dobrých vlastností:

- **dualita** voči polopriestorovej hĺbke,
- konceptuálna a výpočetná **jednoduchosť**,
- affínna **invariancia**,
- konzistencia a robustnosť,
- invariancia voči **elipticky symetrickým** rozdeleniam,

a to všetko **bez predpokladov** na distribúciu P .

V aplikáciách zväčša **prekonáva** mnoho komplikovanejších metód
(Einmahl et al., 2015; Paidaveine a Van Bever, 2013).

Záver

Polopriestorová hĺbka = plávajúce telesá.

Vybraná literatúra



Charles Dupin. *Applications de Géométrie et de Méchanique*. Paris, 1822.



Daniel Fresen. The floating body and the hyperplane conjecture. *Arch. Math. (Basel)*, 98(4):389–397, 2012.



Branko Grünbaum. Partitions of mass-distributions and of convex bodies by hyperplanes. *Pacific J. Math.*, 10:1257–1261, 1960.



Vitali D. Milman and Alain Pajor. Isotropic position and inertia ellipsoids and zonoids of the unit ball of a normed n -dimensional space. In *Geometric aspects of functional analysis (1987–88)*, volume 1376 of *Lecture Notes in Math.*, pages 64–104. Springer, Berlin, 1989.



Richard Rado. A theorem on general measure. *J. London Math. Soc.*, 21:291–300 (1947), 1946.



Carsten Schütt and Elisabeth Werner. The convex floating body. *Math. Scand.*, 66(2):275–290, 1990.



John W. Tukey. Mathematics and the picturing of data. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B. C., 1974)*, Vol. 2, pages 523–531. Canad. Math. Congress, Montreal, Que., 1975.



Elisabeth Werner. Illumination bodies and affine surface area. *Studia Math.*, 110(3):257–269, 1994.