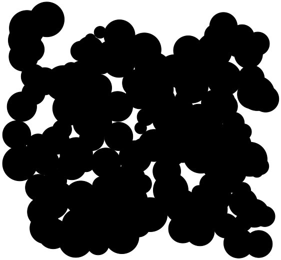
Bodové procesy interagujících úseček

Markéta Zikmundová

Ústav matematiky
Fakulta chemicko inženýrská
Vysoká škola chemicko-technologická v Praze

15.září 2016

Motivace



Proces interagujících úseček

Uvažujme bodový proces úseček μ daný hustotou p vzhledem k Poissonovu procesu η,

$$f(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = c_{\mathbf{x}}^{-1} \exp(\mathbf{x} \cdot T(U_\mu)), \tag{1}$$

kde U_μ je sjednocení úseček **y** procesu μ.
Příklad. ($n = 3$.)

$$T(U_\mu) = (N(U_\mu), L(U_\mu), I(U_\mu)),$$

kde

N. . . počet průsečíků

L. . . celková délka U_μ

I. . . počet izolovaných úseček.

A $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in (-\infty, 0) \times \mathbb{R} \times (-\infty, 0)$.

Časoprostorové rozšíření

Uvažujme nyní, že parametr $\mathbf{x}_{1:T}$ se vyvíjí v čase jako realizace markovského procesu $\mathbf{X}_{1:T}$ s

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{X}_{t-1} + \gamma_t, \qquad t = 1, \ldots, T,$$

kde

γ_t i.i.d. Gaussovské $\mathcal{N}(a, \sigma^2 I_d)$,

$I_d \ldots$ jednotková matice $d \times d$,

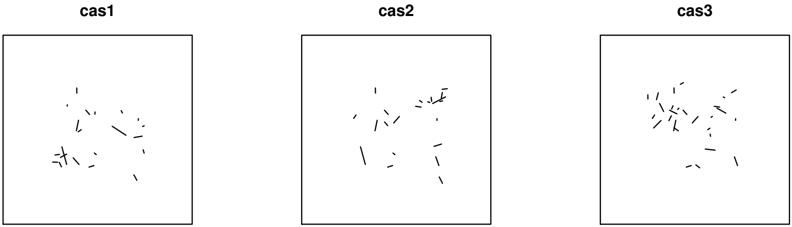
$\theta = (a, \mathbf{x}_0, \sigma^2)$, $a \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, $\sigma^2 > 0$.

Kromě časové závislosti budeme uvažovat i prostorovou závislost (tj. některé úsečky z realizace v čase $t - 1$ se budou vyskytovat i v realizaci v čase t).

Takový proces můžeme nasimulovat pomocí Metropolisova–Hastingsova algoritmu s návrhovým rozdělením

$$Prop_t = (1 - \beta) \cdot Prop^{(RP)} + \beta \cdot Prop_{t-1}^{(emp)}, \quad \beta \in (0, 1).$$

Cíl: Odhadnout parametry rozdělení $\mathbf{x}_t$ a parametr β pomocí částicového filtru



Částicový filtr

- Sekvenční Monte Carlo metoda
- Slouží k odhadu hustoty $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t})$
- Založen na Importance samplingu

$N > 0 \ldots$ počet částic
Označme $\mathbf{X}_{0:t} = (\mathbf{X}_0, \ldots, \mathbf{X}_t)$, $x_{0:t} = (\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_t)$
Přechodová hustota

$$p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}) = \mathcal{N}(a + t_{t-1}, \sigma^2 I)$$

$p(\mathbf{x}_0) \ldots$ počáteční rozdělení.
$f(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_t) = c_{\mathbf{x}_t} \exp(\mathbf{x}_t G(U_{\mathbf{y}}))$

Algoritmus PF

- Vyber $\mathbf{x}_0 \sim p(\mathbf{x})$, polož $t = 1$.
  - Vyber $\mathbf{X}_1^k \sim q_\theta(.|\mathbf{y}_1)$.
  - Spočti a znormuj váhy

$$w_1(\mathbf{X}_1^k) = \frac{p_\theta(\mathbf{X}_1^k|\mathbf{x}_0)f(\mathbf{y}_1|\mathbf{X}_1^k)}{q_\theta(\mathbf{X}_1^k|\mathbf{y}_1)},$$

- V čase $t = 2, \ldots, T$:
  - vyber $A_{t-1}^k \sim \mathcal{F}(.|\tilde{w}_{t-1})$,
  - vyber $\mathbf{X}_t^k \sim q_\theta(.|\mathbf{y}_t, \mathbf{X}_{t-1}^{A_{t-1}^k})$ a polož $\mathbf{X}_{1:t}^k = (\mathbf{X}_{1:t-1}^{A_{t-1}^k}, \mathbf{X}_t^k)$,
  - spočti a znormuj váhy

$$w_t(\mathbf{X}_{1:t}^k) = \frac{p_\theta(\mathbf{X}_t^k|\mathbf{X}_{t-1}^{A_{t-1}^k})f(\mathbf{y}_t|\mathbf{X}_t^k)}{q_\theta(\mathbf{X}_t^k|y_t, \mathbf{X}_{t-1}^{A_{t-1}^k})}.$$

Algoritmus II (PMMH):

[Andrieu, Doucet, Holenstein, 2010]
Inicializace: $i = 0$,

- zvol $\theta(0)$ libovolně,
- Spusť (SMC) algoritmus I zaměřený na $p_{\theta(0)}(\mathbf{x}_{1:T}|\mathbf{y}_{1:T})$, vyber $\mathbf{X}_{1:T} \sim \hat{p}_{\theta(0)}(.|\mathbf{y}_{1:T})$ a nechť $\hat{p}_{\theta(0)}(\mathbf{y}_{1:T})$ značí věrohodnostní odhad

Pro iteraci $i \geq 1$:

- vyber $\theta^* \sim q(.|\theta(i-1))$,
- spusť SMC algoritmus I zaměřený na $p_{\theta^*}(\mathbf{x}_{1:T}|\mathbf{y}_{1:T})$,
- vyber $\mathbf{X}^*_{1:T} \sim \hat{p}_{\theta^*}(.|\mathbf{y}_{1:T})$ a nechť $\hat{p}_{\theta^*}(\mathbf{y}_{1:T})$ značí věrohodnostní odhad,

- s pravděpodobností

$$1 \wedge \frac{\hat{p}_{\theta^*}(\mathbf{y}_{1:T})p(\theta^*)}{\hat{p}_{\theta(i-1)}(\mathbf{y}_{1:T})p(\theta(i-1))} \frac{q(\theta(i-1)|\theta^*)}{q(\theta^*|\theta(i-1))}$$

  polož $\theta(i) = \theta^*$, $\mathbf{X}_{1:T}(i) = \mathbf{X}^*_{1:T}$ a $\hat{p}_{\theta(i)}(\mathbf{y}_{1:T}) = \hat{p}_{\theta^*}(\mathbf{y}_{1:T})$, jinak polož
  $\theta(i) = \theta(i-1)$, $\mathbf{X}_{1:T}(i) = \mathbf{X}_{1:T}(i-1)$ a $\hat{p}_{\theta(i)}(\mathbf{y}_{1:T}) = \hat{p}_{\theta(i-1)}(\mathbf{y}_{1:T})$.

Odhad $p_\theta(\mathbf{y}_{1:T})$:

$$\hat{p}_\theta(\mathbf{y}_{1:T}) := \hat{p}_\theta(\mathbf{y}_1) \prod_{t=2}^{T} \hat{p}_\theta(\mathbf{y}|\mathbf{y}_{1:t-1}),$$

$$\hat{p}_\theta(\mathbf{y}|\mathbf{y}_{1:t-1}) = \frac{1}{N} \sum w_t(X^k_{1:t}).$$

Částicový filtr - omezení

- Předpoklad: Pozorování $\{Y_t\}$ jsou podmíněně nezávislé při daném $\{X_t\}$.

Částicový filtr - omezení

- Předpoklad: Pozorování $\{Y_t\}$ jsou podmíněně nezávislé při daném $\{X_t\}$.
- Zjemnění: Proces $\{Y_t\}$ je Markovský řetězec při daném $\{X_t\}$.

Částicový filtr - omezení

- Předpoklad: Pozorování $\{Y_t\}$ jsou podmíněně nezávislé při daném $\{X_t\}$.
- Zjemnění: Proces $\{Y_t\}$ je Markovský řetězec při daném $\{X_t\}$.

$$
\begin{aligned}
p(\mathbf{x}_{1:T}|\mathbf{y}_{1:T}) \quad &\propto \quad p(\mathbf{x}_{1:T}, \mathbf{y}_{1:T}) \\
&= p(\mathbf{x}_1) \prod_{t=2}^{T} p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}) \prod_{t=2}^{T} f(\mathbf{y}_{1:t}|\mathbf{x}_{1:t}) \\
&= p(\mathbf{x}_1) \prod_{t=2}^{T} p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}) p(\mathbf{y}_1|\mathbf{x}_1) \prod_{t=2}^{T} p(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_{t-1})
\end{aligned}
$$

Simulace

Simulace

Běží

Simulace

Běží ...a ještě dlouho budou