

Metoda minimálního kontrastu pro nehomogenní časoprostorové shlukové bodové procesy

Jiří Dvořák^{1,2}, Michaela Prokešová¹

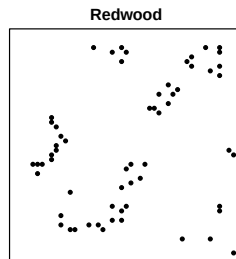
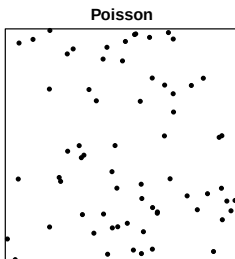
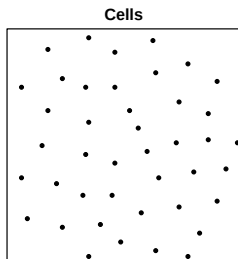
¹Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova, Praha,

²Ústav teorie informace a automatizace, Akademie věd ČR, Praha

ROBUST 2016

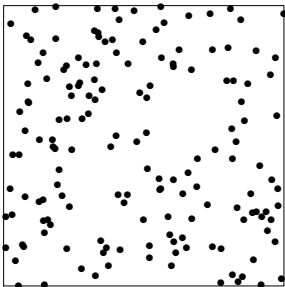
15. 9. 2016

Bodové procesy – regularita vs. shlukování

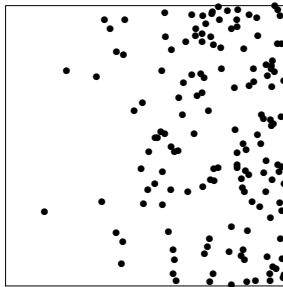


Bodové procesy – stacionární vs. nestacionární

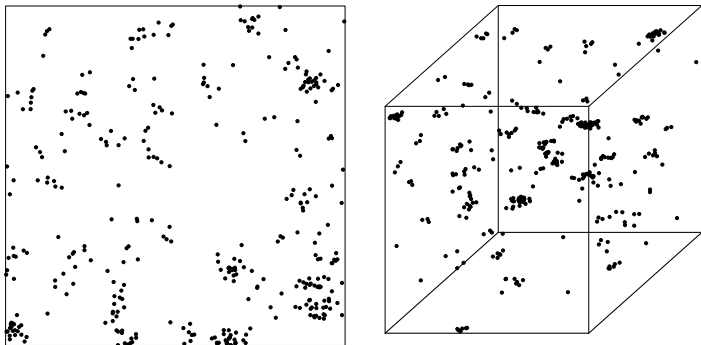
Stacionární Poissonův proces



Nestacionární Poissonův proces



Bodové procesy – prostorové vs. časoprostorové



Coxův proces proces s náhodnou funkcí intenzity

$$\Lambda(u) = \sum_{v \in \Phi} \mu k(v - u), \quad u \in \mathbb{R}^2$$

Φ – Poissonův proces v $\mathbb{R}^2$ s intenzitou $\kappa > 0$

μ – střední počet dceřinných bodů ve shluku

k – vyhlazovací jádro (hustota na $\mathbb{R}^2$)

Coxův proces proces s náhodnou funkcí intenzity

$$\Lambda(u) = \sum_{v \in \Phi} \mu k(v - u), \quad u \in \mathbb{R}^2$$

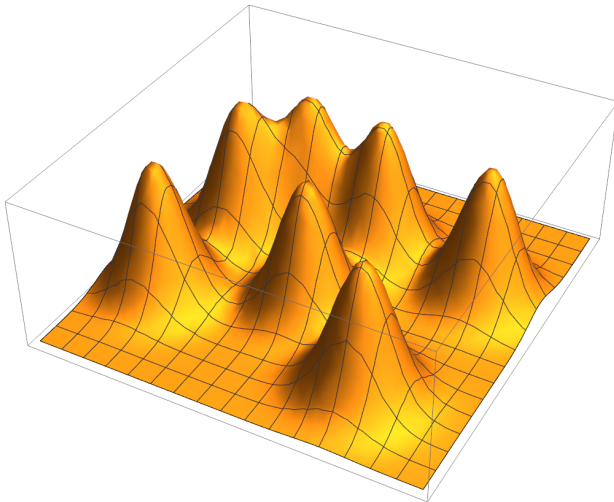
Φ – Poissonův proces v $\mathbb{R}^2$ s intenzitou $\kappa > 0$

μ – střední počet dceřinných bodů ve shluku

k – vyhlazovací jádro (hustota na $\mathbb{R}^2$)

(Poisson-Neyman-Scott model; podobně shot-noise Coxovy procesy)

Stacionární PROSTOROVÝ shlukový proces



$$\Lambda(u, t) = \sum_{(v, s) \in \Phi} \mu k(v - u, s - t), \quad (u, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$

Φ – Poissonův proces v $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ s intenzitou $\kappa > 0$

μ – střední počet dceřinných bodů ve shluku

k – vyhlazovací jádro (hustota na $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$)

$$\Lambda(u, t) = \sum_{(v, s) \in \Phi} \mu k(v - u, s - t), \quad (u, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$

Φ – Poissonův proces v $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ s intenzitou $\kappa > 0$

μ – střední počet dceřinných bodů ve shluku

k – vyhlazovací jádro (hustota na $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$)

(obrázek vynechán)

- nestacionarita vnesena nezávislým ztenčením stacionárního procesu
- $0 \leq f \leq 1$. . . „funkce nehomogenity“
- každý bod (u, t) stacionárního procesu zachován s pstí $f(u, t)$, nezávisle na ostatních bodech
- f může záviset na vektoru kovariát $z(u, t)$

- X ... ztenčený (nestacionární) časoprostorový proces
- λ ... jeho funkce intenzity (1. řádu)
- $W \times T$... pozorovací okno, $|W| > 0, |T| > 0$
- k ... vyhlazovací jádro
- $\max_{W \times T} f = 1$

- X ... ztenčený (nestacionární) časoprostorový proces
- λ ... jeho funkce intenzity (1. řádu)
- $W \times T$... pozorovací okno, $|W| > 0, |T| > 0$
- k ... vyhlazovací jádro
- $\max_{W \times T} f = 1$
- β ... (vektorový) parametr funkce nehomogenity $f(\cdot; \beta)$
- ψ ... (vektorový) parametr vyhlazovacího jádra $k(\cdot, \cdot; \psi)$
- κ, μ ... intenzita rodičů, střední počet bodů ve shluku

věrohodnostní přístup komplikovaný, alternativní postup
(inspirovaný článkem Waagepetersen, Guan, 2009):

věrohodnostní přístup komplikovaný, alternativní postup (inspirovaný článkem Waagepetersen, Guan, 2009):

- 1 odhad parametrů nehomogenity β maximalizací poissonovské věrohodnostní funkce

věrohodnostní přístup komplikovaný, alternativní postup (inspirovaný článkem Waagepetersen, Guan, 2009):

- 1 odhad parametrů nehomogenity β maximalizací poissonovské věrohodnostní funkce
- 2 odhad interakčních parametrů ψ pomocí minimálního kontrastu na časoprostorovou K -funkci

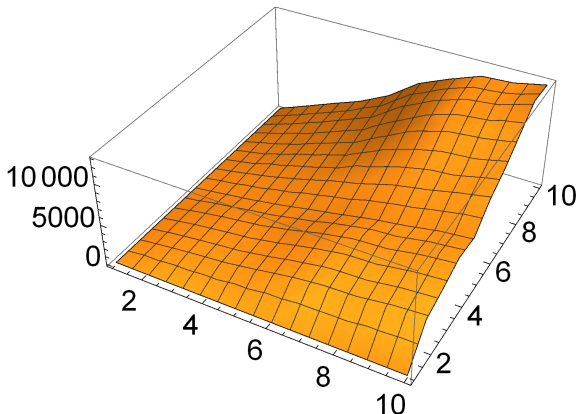
věrohodnostní přístup komplikovaný, alternativní postup (inspirovaný článkem Waagepetersen, Guan, 2009):

- 1 odhad parametrů nehomogenity β maximalizací poissonovské věrohodnostní funkce
- 2 odhad interakčních parametrů ψ pomocí minimálního kontrastu na časoprostorovou K -funkci
- 3 dopočítání odhadu κ a μ z předchozích odhadů a celkové intenzity procesu

Druhý krok – minimální kontrast

Beneš a kol. (2015), “plný kontrast”

$$\hat{\psi} = \arg \min \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} (\hat{K}(r, t)^q - K(r, t; \psi)^q)^2 dt dr$$



Druhý krok – plný kontrast

$$\hat{K}(r, t) = \sum_{(u_i, t_i), (u_j, t_j) \in X \cap (W \times T)}^{\neq} \frac{I(\|u_i - u_j\| \leq r, |t_i - t_j| \leq t)}{\lambda(u_i, t_i; \hat{\beta}) \lambda(u_j, t_j; \hat{\beta}) |W \times T|} \cdot \frac{1}{w_1(u_i, u_j) w_2(t_i, t_j)}$$

$$\hat{K}(r, t) = \sum_{\substack{\neq \\ (u_i, t_i), (u_j, t_j) \in X \cap (W \times T)}} \frac{I(\|u_i - u_j\| \leq r, |t_i - t_j| \leq t)}{\lambda(u_i, t_i; \hat{\beta}) \lambda(u_j, t_j; \hat{\beta}) |W \times T|} \cdot \frac{1}{w_1(u_i, u_j) w_2(t_i, t_j)}$$

Vlastnosti:

- + nevyžaduje časoprostorovou separabilitu $\lambda(u, t), f(u, t)$

$$\hat{K}(r, t) = \sum_{\substack{\neq \\ (u_i, t_i), (u_j, t_j) \in X \cap (W \times T)}} \frac{I(\|u_i - u_j\| \leq r, |t_i - t_j| \leq t)}{\lambda(u_i, t_i; \hat{\beta}) \lambda(u_j, t_j; \hat{\beta}) |W \times T|} \cdot \frac{1}{w_1(u_i, u_j) w_2(t_i, t_j)}$$

Vlastnosti:

- + nevyžaduje časoprostorovou separabilitu $\lambda(u, t), f(u, t)$
- optimalizace vzhledem ke všem interakčním parametrům najednou

$$\hat{K}(r, t) = \sum_{\substack{\neq \\ (u_i, t_i), (u_j, t_j) \in X \cap (W \times T)}} \frac{I(\|u_i - u_j\| \leq r, |t_i - t_j| \leq t)}{\lambda(u_i, t_i; \hat{\beta}) \lambda(u_j, t_j; \hat{\beta}) |W \times T|} \cdot \frac{1}{w_1(u_i, u_j) w_2(t_i, t_j)}$$

Vlastnosti:

- + nevyžaduje časoprostorovou separabilitu $\lambda(u, t), f(u, t)$
- optimalizace vzhledem ke všem interakčním parametrům najednou
- vyžaduje jemnou mřížku $(r_i, t_i) \Rightarrow$ výpočetní náročnost

$$\hat{K}(r, t) = \sum_{\substack{\neq \\ (u_i, t_i), (u_j, t_j) \in X \cap (W \times T)}} \frac{I(\|u_i - u_j\| \leq r, |t_i - t_j| \leq t)}{\lambda(u_i, t_i; \hat{\beta}) \lambda(u_j, t_j; \hat{\beta}) |W \times T|} \cdot \frac{1}{w_1(u_i, u_j) w_2(t_i, t_j)}$$

Vlastnosti:

- + nevyžaduje časoprostorovou separabilitu $\lambda(u, t), f(u, t)$
- optimalizace vzhledem ke všem interakčním parametrům najednou
- vyžaduje jemnou mřížku $(r_i, t_i) \Rightarrow$ výpočetní náročnost
- citlivost na volbu počátečního odhadu

$$\hat{K}(r, t) = \sum_{\substack{\neq \\ (u_i, t_i), (u_j, t_j) \in X \cap (W \times T)}} \frac{I(\|u_i - u_j\| \leq r, |t_i - t_j| \leq t)}{\lambda(u_i, t_i; \hat{\beta}) \lambda(u_j, t_j; \hat{\beta}) |W \times T|} \cdot \frac{1}{w_1(u_i, u_j) w_2(t_i, t_j)}$$

Vlastnosti:

- + nevyžaduje časoprostorovou separabilitu $\lambda(u, t), f(u, t)$
- optimalizace vzhledem ke všem interakčním parametrům najednou
- vyžaduje jemnou mřížku $(r_i, t_i) \Rightarrow$ výpočetní náročnost
- citlivost na volbu počátečního odhadu

Otázka:

$$\hat{K}(r, t) = \sum_{\substack{\neq \\ (u_i, t_i), (u_j, t_j) \in X \cap (W \times T)}} \frac{I(\|u_i - u_j\| \leq r, |t_i - t_j| \leq t)}{\lambda(u_i, t_i; \hat{\beta}) \lambda(u_j, t_j; \hat{\beta}) |W \times T|} \cdot \frac{1}{w_1(u_i, u_j) w_2(t_i, t_j)}$$

Vlastnosti:

- + nevyžaduje časoprostorovou separabilitu $\lambda(u, t), f(u, t)$
- optimalizace vzhledem ke všem interakčním parametrům najednou
- vyžaduje jemnou mřížku $(r_i, t_i) \Rightarrow$ výpočetní náročnost
- citlivost na volbu počátečního odhadu

Otázka: Můžeme mít + bez těch -?

Předpokládejme (jako Møller, Ghorbani, 2012):

$$k(w, \tau; \psi) = k_1(w; \psi_1)k_2(\tau; \psi_2), \quad w \in \mathbb{R}^2, \tau \in \mathbb{R}$$

Předpokládejme (jako Møller, Ghorbani, 2012):

$$k(w, \tau; \psi) = k_1(w; \psi_1) k_2(\tau; \psi_2), \quad w \in \mathbb{R}^2, \tau \in \mathbb{R}$$

$$K(r, t) = 2\pi r^2 t + \frac{1}{\kappa} \cdot P_1(r; \psi_1) \cdot P_2(t; \psi_2), \quad r \geq 0, t \geq 0$$

Předpokládejme (jako Møller, Ghorbani, 2012):

$$k(w, \tau; \psi) = k_1(w; \psi_1)k_2(\tau; \psi_2), \quad w \in \mathbb{R}^2, \tau \in \mathbb{R}$$

$$K(r, t) = 2\pi r^2 t + \frac{1}{\kappa} \cdot P_1(r; \psi_1) \cdot P_2(t; \psi_2), \quad r \geq 0, t \geq 0$$

Předpoklad není omezující: i výrazné porušení se pouze slabě projeví na této struktuře.

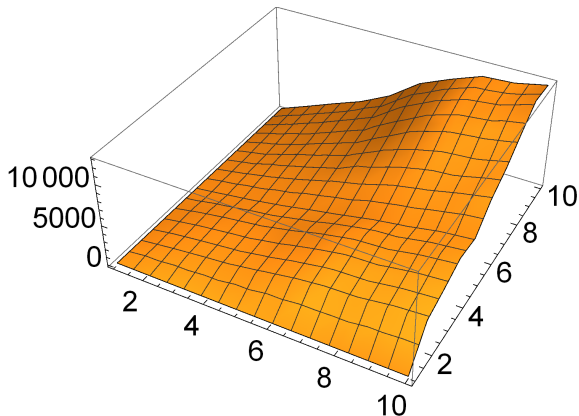
Předpokládejme (jako Møller, Ghorbani, 2012):

$$k(w, \tau; \psi) = k_1(w; \psi_1)k_2(\tau; \psi_2), \quad w \in \mathbb{R}^2, \tau \in \mathbb{R}$$

$$K(r, t) = 2\pi r^2 t + \frac{1}{\kappa} \cdot P_1(r; \psi_1) \cdot P_2(t; \psi_2), \quad r \geq 0, t \geq 0$$

Předpoklad není omezující: i výrazné porušení se pouze slabě projeví na této struktuře. Odchylku není možné zjistit z empirického odhadu $K(r, t)$.

$$K(r, t) = 2\pi r^2 t + \frac{1}{\kappa} \cdot P_1(r; \psi_1) \cdot P_2(t; \psi_2), \quad r \geq 0, t \geq 0$$



- vybereme prostorový dosah $R > 0$
- odhadneme $\hat{K}(R, t)$ jako funkci t
- použijeme minimální kontrast na

$$\begin{aligned} K(R, t) &= 2\pi R^2 t + \frac{1}{\kappa} \cdot P_1(R; \psi_1) \cdot P_2(t; \psi_2) \\ &= 2\pi R^2 t + c(\kappa, \psi_1, R) \cdot P_2(t; \psi_2) \end{aligned}$$

- vybereme časový dosah $\tau > 0$
- odhadneme $\hat{K}(r, \tau)$ jako funkci r
- použijeme minimální kontrast na

$$\begin{aligned} K(r, \tau) &= 2\pi r^2 \tau + \frac{1}{\kappa} \cdot P_2(\tau; \psi_2) \cdot P_1(r; \psi_1) \\ &= 2\pi r^2 \tau + c(\kappa, \psi_2, \tau) \cdot P_1(r; \psi_1) \end{aligned}$$

- optimalizace v prostoru nižší dimenze

- optimalizace v prostoru nižší dimenze
- menší citlivost na „špatnou“ volbu počátečního odhadu

- optimalizace v prostoru nižší dimenze
- menší citlivost na „špatnou“ volbu počátečního odhadu
- pracujeme pouze se dvěma profily mřížky $(r_i, \tau), (R, t_i)$

- optimalizace v prostoru nižší dimenze
- menší citlivost na „špatnou“ volbu počátečního odhadu
- pracujeme pouze se dvěma profily mřížky $(r_i, \tau), (R, t_i)$
- konzistence, asymptotická normalita odhadů $\hat{\beta}, \hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2$ za standardních předpokladů (momentové vlastnosti, mixing)

- optimalizace v prostoru nižší dimenze
- menší citlivost na „špatnou“ volbu počátečního odhadu
- pracujeme pouze se dvěma profily mřížky $(r_i, \tau), (R, t_i)$
- konzistence, asymptotická normalita odhadů $\hat{\beta}, \hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2$ za standardních předpokladů (momentové vlastnosti, mixing)
- v simulačních studiích
 - s „dobrou“ inicializací skoro stejně přesné odhady jako plný kontrast

- optimalizace v prostoru nižší dimenze
- menší citlivost na „špatnou“ volbu počátečního odhadu
- pracujeme pouze se dvěma profily mřížky $(r_i, \tau), (R, t_i)$
- konzistence, asymptotická normalita odhadů $\hat{\beta}, \hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2$ za standardních předpokladů (momentové vlastnosti, mixing)
- v simulačních studiích
 - s „dobrou“ inicializací skoro stejně přesné odhady jako plný kontrast
 - se „špatnou“ inicializací mnohem stabilnější odhady než plný kontrast

- ① Beneš, V. et al. (2015). *Space-time models in stochastic geometry*. In: Stochastic Geometry, Spatial Statistics and Random Fields: Models and Algorithms (ed. V. Schmidt). Springer, Heidelberg.
- ② Møller, J., Ghorbani, M. (2012). *Aspects of second-order analysis of structured inhomogeneous spatio-temporal point processes*. Stat. Neerlandica **66**, 472 – 491.
- ③ Waagepetersen, R. P., Guan, Y. (2009). *Two-step estimation for inhomogeneous spatial point processes*. J. R. Stat. Soc. B **71**, 685 – 702.