Užití částicového marginálního Metropolisova Hastingsova algoritmu ve stochastické geometrii

Markéta Zikmundová

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzta Karlova v Praze

11.září 2012

Proces disků

Mějme bodový proces disků $\tilde{Y}$ se středy v omezené množině $S \in \mathbb{R}^2$ daný hustotou

$$p(y|x) = c_x^{-1} \exp(x \cdot (A(U_y), L(U_y), \chi(U_y))), \tag{1}$$

vzhledem k Poissonově bodovému procesu disků Ψ na $S \times (0, \infty)$ s mírou intenzity $\rho(z)dzQ(dr)$.

$x \in \mathbb{R}^3 \dots$ neznámý náhodný vektor parametrů
$(A(U_y), L(U_y), \chi(U_y)) \dots$ vektor geometrických charakteristik sjednocení disků U_y s konfigurací $y \in \tilde{Y}$

$A \dots$ plocha U_y
$L \dots$ obvod U_y
$\chi \dots$ Eulerova–Poincarého charakteristika

Stavový prostor (SSM)

Uvažujme, že X_t je Markovský proces se stavy v $\mathbb{R}^3$ s přechodovou hustotou

$$p(x_t|x_{t-1}) = \mathcal{N}(a + x_{t-1}, \sigma^2 I), \qquad (2)$$

kde $a \in \mathbb{R}^3, \sigma^2 > 0$ jsou vedlejší parametry a I jednotková matice v $\mathbb{R}^3$.

Místo realizací X_t pozorujeme proces $\tilde{Y}_t$, respektive geometrické charakteristiky sjednocení U_y.

Dále označme

$x_{0:t} = (x_0, \ldots, x_t)$

$p(x_0) \ldots$ počáteční rozdělení x_0.

a

$$p(y_t|x_t) = c_{x_t}^{-1} \exp(x_t \cdot (A(U_y), L(U_y), \chi(U_y)))$$

podmíněné rozdělení pozorovaného procesu.

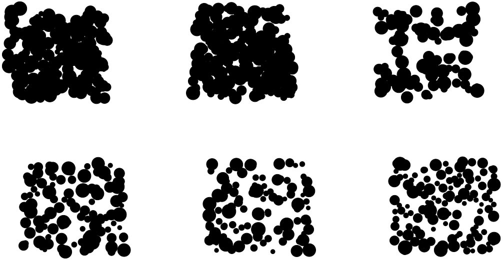


Figure: Posloupnost realizací procesu disků v časech $t = 0, 5, 10, 15, 20, 25$.

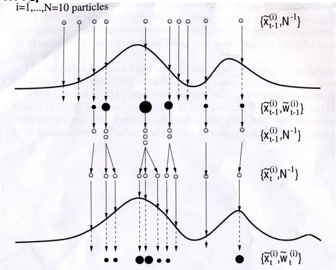
Částicový filtr (PF)

- Známe-li, nebo jsme-li schopni nějak odhadnout vedlejší parametry a, σ^2.

Sekvenční Monte Carlo metoda založená na výběru na základě důležitosti (Importance sampling - IS)

používá N nezávislých výběrů (částic) k odhadu $p(x_{1:t})$
běží ve dvou krocích

- sekvenční IS
- "resampling"



Částicový Markov Chain Monte Carlo algoritmus (PMCMC)

- Pro případ, že vedlejší parametry a, σ^2 nejsou známé.

Kombinuje klasické Monte Carlo metody

- Metropolisův Hastingsův algoritmus
  v každé iteraci navrhneme hodnotu a, σ^2
- sekvenční Monte Carlo (PF)
  pro každý takový návrh použijeme PF k odhadu $x_{1:t}$

Hastingsův poměr je pak kombinací apriorů pro a, σ^2 a $x_{1:t}$ a odhadu marginální věrohodnosti $p(y_{1:t})$

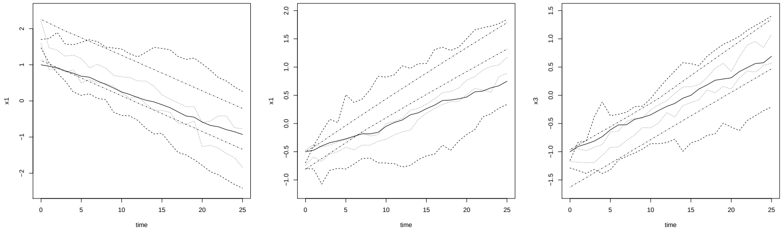


Figure: Obálky odhadu parametru založené na 19 realizacích. Plná čára odpovídá skutečnému vývoji, tečkovaná MLE odhadům, čárkovaná PF a čerchovaná pro PMMH.