Statistická inference pro Coxovy bodové procesy s Lévyho bází

Michaela Prokešová

KPMS MFF UK

ROBUST 2012, Němčičky

Poissonův proces s intenzitou Λ

$$\mathcal{L}(X(A)) \sim Poiss(\Lambda(A))$$

Bodové procesy v $\mathbb{R}^d$

Poissonův proces s intenzitou Λ

$$\mathcal{L}(X(A)) \sim Poiss(\Lambda(A))$$

Coxův proces: náhodná míra intenzity Λ

$$\mathcal{L}(X(A)|\Lambda) \sim Poiss(\Lambda(A))$$

Bodové procesy v $\mathbb{R}^d$

Poissonův proces s intenzitou Λ

$$\mathcal{L}(X(A)) \sim Poiss(\Lambda(A))$$

Coxův proces: náhodná míra intenzity Λ

$$\mathcal{L}(X(A)|\Lambda) \sim Poiss(\Lambda(A))$$

- log-Gaussovské Coxovy procesy

Bodové procesy v $\mathbb{R}^d$

Poissonův proces s intenzitou Λ

$$\mathcal{L}(X(A)) \sim Poiss(\Lambda(A))$$

Coxův proces: náhodná míra intenzity Λ

$$\mathcal{L}(X(A)|\Lambda) \sim Poiss(\Lambda(A))$$

- log-Gaussovské Coxovy procesy
- Coxovy procesy s Lévyho bází

Coxovy bodové procesy s Lévyho bází

Coxův bodový proces s Lévyho bází (LCP) má řídící intenzitu tvaru

$$\lambda(u) = \int_R k(u,v) L(\mathrm{d}v), \qquad u \in \mathrm{S},$$

kde L je nezáporná Lévyho báze na $\mathcal{R}$ a k je nezáporná funkce na $\mathrm{S} \times R$ taková, že $k(u,\cdot)$ je integrovatelná vzhledem k L pro každé $u \in \mathrm{S}$ a $k(\cdot, v)$ je integrovatelná vzhledem k Lebesgueově míře na $\mathcal{S}$, pro každé $v \in R$.

Coxovy bodové procesy s Lévyho bází

Coxův bodový proces s Lévyho bází (LCP) má řídící intenzitu tvaru

$$\lambda(u) = \int_R k(u, v)L(\mathrm{d}v), \qquad u \in \mathrm{S},$$

kde L je nezáporná Lévyho báze na $\mathcal{R}$ a k je nezáporná funkce na $\mathrm{S} \times R$ taková, že $k(u, \cdot)$ je integrovatelná vzhledem k L pro každé $u \in \mathrm{S}$ a $k(\cdot, v)$ je integrovatelná vzhledem k Lebesgueově míře na $\mathcal{S}$, pro každé $v \in R$.

V dalším $\mathrm{S}, R \subset \mathbb{R}^d$ a integrál z k přes u i v je 1.

Coxovy bodové procesy s Lévyho bází

Coxův bodový proces s Lévyho bází (LCP) má řídící intenzitu tvaru

$$\lambda(u) = \int_R k(u,v)L(\mathrm{d}v), \qquad u \in \mathrm{S},$$

kde L je nezáporná Lévyho báze na $\mathcal{R}$ a k je nezáporná funkce na $\mathrm{S} \times R$ taková, že $k(u,\cdot)$ je integrovatelná vzhledem k L pro každé $u \in \mathrm{S}$ a $k(\cdot,v)$ je integrovatelná vzhledem k Lebesgueově míře na $\mathcal{S}$, pro každé $v \in R$.

V dalším $\mathrm{S}, R \subset \mathbb{R}^d$ a integrál z k přes u i v je 1.

Lévyho báze: nekonečně dělitelná, nezávisle rozložená náhodná míra na $\mathcal{R}$.

Coxovy bodové procesy s Lévyho bází

Coxův bodový proces s Lévyho bází (LCP) má řídící intenzitu tvaru

$$\lambda(u) = \int_R k(u,v)L(\mathrm{d}v), \qquad u \in \mathrm{S},$$

kde L je nezáporná Lévyho báze na $\mathcal{R}$ a k je nezáporná funkce na $\mathrm{S} \times R$ taková, že $k(u,\cdot)$ je integrovatelná vzhledem k L pro každé $u \in \mathrm{S}$ a $k(\cdot,v)$ je integrovatelná vzhledem k Lebesgueově míře na $\mathcal{S}$, pro každé $v \in R$.

V dalším $\mathrm{S}, R \subset \mathbb{R}^d$ a integrál z k přes u i v je 1.

Lévyho báze: nekonečně dělitelná, nezávisle rozložená náhodná míra na $\mathcal{R}$.

Lévy-Itoova reprezentace (sdružená reprezentace charakteristiké funkce všech $L(A)$ pro $A \in \mathcal{A}$) způsobuje, že výsledný zkoumaný proces je tzv. shot-noise Coxův process (s trendem).

Shot-noise reprezentace

$$\Lambda(u) = \sum_{(v,r)\in\Phi} r k(u,v),$$

kde Φ je Poissonova míra na $R \times (0,\infty)$ s mírou intenzity $U(\mathrm{d}r, \mathrm{d}v)$.

Coxovy bodové procesy s Lévyho bází

Shot-noise reprezentace

$$\Lambda(u) = \sum_{(v,r)\in\Phi} r k(u,v),$$

kde Φ je Poissonova míra na $R \times (0,\infty)$ s mírou intenzity $U(\mathrm{d}r, \mathrm{d}v)$.

Pro stacionární Coxův proces s Lévyho bází platí:

$$k(u,v) = k(v-u)$$
$$U(\mathrm{d}r, \mathrm{d}v) = \mu V(\mathrm{d}r)\mathrm{d}v$$

Coxovy bodové procesy s Lévyho bází

Shot-noise reprezentace

$$\Lambda(u) = \sum_{(v,r)\in\Phi} r k(u,v),$$

kde Φ je Poissonova míra na $R \times (0,\infty)$ s mírou intenzity $U(\mathrm{d}r, \mathrm{d}v)$.

Pro stacionární Coxův proces s Lévyho bází platí:

$$k(u,v) = k(v-u)$$
$$U(\mathrm{d}r, \mathrm{d}v) = \mu V(\mathrm{d}r)\,\mathrm{d}v$$

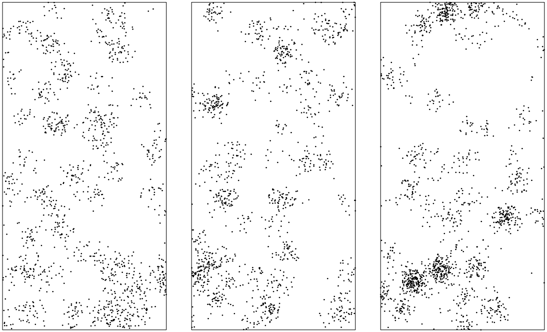
Příklady:

$V(\mathrm{d}r) = c\delta_1(\mathrm{d}r)$ ... (násobek) Poissonovy Lévyho báze
$\rightarrow$ obyčejný shlukový Neyman-Scottův proces

$V(\mathrm{d}r) = I(r>0)r^{-1}e^{-\theta r}\,\mathrm{d}r$ ... gamma Lévyho báze

$V(\mathrm{d}r) = I(r>0)r^{-\frac{3}{2}}/\Gamma(\frac{1}{2})\,e^{-\theta r}\,\mathrm{d}r$ ... inverzní Gaussovská Lévyho báze

Stacionární Coxovy bodové procesy s Lévyho bází:
Poissonova, gamma a inverzní Gaussovská Lévyho báze.



Věrohodnost

Buď $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ pozorovaná realizace Coxova bodového procesu X na kompaktním okně $W \in \mathbb{R}^d$.

Pro Coxův bodový proces s řídící intenzitou λ_θ je věrohodnost

$$f_\theta(\mathbf{x}) = \mathbb{E}_\theta \left[\exp\left\{ |W| - \int_W \lambda_\theta(u) du \right\} \prod_{i=1}^{n} \lambda_\theta(x_i) \right].$$

pro netriviální případy k odhadu nevhodná.

Věrohodnost

Buď $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ pozorovaná realizace Coxova bodového procesu X na kompaktním okně $W \in \mathbb{R}^d$.

Pro Coxův bodový proces s řídící intenzitou λ_θ je věrohodnost

$$f_\theta(\mathbf{x}) = \mathbb{E}_\theta \left[\exp\left\{ |W| - \int_W \lambda_\theta(u) du \right\} \prod_{i=1}^{n} \lambda_\theta(x_i) \right].$$

pro netriviální případy k odhadu nevhodná.

$\longrightarrow$ momentové metody

Momentové míry, součinové hustoty

Součinové hustoty prvního a druhého řádu $\rho, \rho^{(2)}$:

Pro každé nezáporné Borelovské funkce h_1, h_2 na $\mathbb{R}^d$, resp. $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ platí

$$\begin{aligned} \int h_1(u)\rho(u)du &= \mathbb{E} \sum_{u \in X} h_1(u) \\ \int\int h_2(u,v)\rho^{(2)}(u,v)d(u,v) &= \mathbb{E} \sum_{u,v \in X}^{\neq} h_2(u,v). \end{aligned}$$

$\longrightarrow$

$\rho(u)du$ ... "střední počet bodů procesu v du"

$\rho^{(2)}(u,v)d(u,v)$ ... "střední počet dvojic bodů v $d(u,v)$".

Momentové míry, součinové hustoty

Odvozené charakteristiky:

Párová korelační funkce $g(u, v) = \frac{\rho^{(2)}(u,v)}{\rho(u)\rho(v)}$

ve stacionárním případě:

$$\rho(u) = \rho, \qquad g(u, v) = \frac{\rho^{(2)}(u, v)}{\rho^2} = g(v - u)$$

Momentové míry, součinové hustoty

Odvozené charakteristiky:

Párová korelační funkce $g(u,v) = \frac{\rho^{(2)}(u,v)}{\rho(u)\rho(v)}$

ve stacionárním případě:

$$\rho(u) = \rho, \qquad g(u,v) = \frac{\rho^{(2)}(u,v)}{\rho^2} = g(v-u)$$

K funkce ve stacionárním případě

$$K(R) = \int_{B(o,R)} g(u)du = \mathbb{E}\left[X(B(o,R)\backslash\{o\})\,|X(\{o\}) = 1\right]/\rho, \quad R > 0.$$

Momentové vlastnosti

Vzorce pro součinové hustoty LCP:

$$\rho(u) = \mathbb{E}\lambda(u) = \int_{\mathbb{R}_+}\int_R k(u,v)U(\mathrm{d}r, \mathrm{d}v)$$

$$g(u,v) = 1 + \frac{\int_{\mathbb{R}_+}\int_R r^2 k(u,z)k(v,z)U(\mathrm{d}r, \mathrm{d}z)}{\rho(u)\rho(v)}$$

Momentové vlastnosti

Vzorce pro součinové hustoty LCP:
Speciálně pro stacionární LCP

$$\rho(u) = \mu\,\mathbb{E}L', \quad g(u,v) = 1 + \frac{\mathrm{Var}L'}{(\mathbb{E}L')^2}\,\frac{I_k(v-u)}{\mu},$$

kde

$$I_k(v-u) = \int_{\mathbb{R}^d} k(v-z)k(u-z)\,\mathrm{d}z$$

a $\mathbb{E}L', \mathrm{Var}L'$ jsou charakteristiky Lévyho báze.

Momentové vlastnosti

Vzorce pro součinové hustoty LCP:
Speciálně pro stacionární LCP

$$\rho(u) = \mu\,\mathbb{E}L', \quad g(u,v) = 1 + \frac{\mathrm{Var}L'}{(\mathbb{E}L')^2}\,\frac{I_k(v-u)}{\mu},$$

kde

$$I_k(v-u) = \int_{\mathbb{R}^d} k(v-z)k(u-z)\,\mathrm{d}z$$

a $\mathbb{E}L'$, $\mathrm{Var}L'$ jsou charakteristiky Lévyho báze.

Pro naše příklady:

	Poissonova LB	gamma LB	inverzní Gaussovská LB
$\mathbb{E}L'$	c	$1/\theta$	$1/\sqrt{\theta}$
$\mathrm{Var}L'/(\mathbb{E}L')^2$	$1/\mathbb{E}L'$	1	$\mathbb{E}L'$

Odhady parametrů

Pozorujeme (jednu) realizaci LCP na kompaktním okně W.

Odhady parametrů získáme metodou minimálního kontrastu (MCE) pro párovou korelační funkci g nebo pro K funkci

Minimalizací kontrastní míry

$$\int_r^R [\hat{K}^q(u) - K^q(u;\zeta)]^2 \, \mathrm{d}u$$

získáme $\zeta = (\sigma, \beta)$, kde σ značí (vektorový) parametr jádra k a $\beta = \frac{1}{\mu} \frac{\mathrm{Var} L'}{(\mathbb{E}L')^2}$.

Odhady parametrů

Pozorujeme (jednu) realizaci LCP na kompaktním okně W.

Odhady parametrů získáme metodou minimálního kontrastu (MCE) pro párovou korelační funkci g nebo pro K funkci

Minimalizací kontrastní míry

$$\int_r^R [\hat{K}^q(u) - K^q(u;\zeta)]^2 \,\mathrm{d}u$$

získáme $\zeta = (\sigma, \beta)$, kde σ značí (vektorový) parametr jádra k a $\beta = \frac{1}{\mu} \frac{\mathrm{Var} L'}{(\mathbb{E}L')^2}$.

μ a θ (nebo c v případě Poissonovy Lévyho báze) můžeme identifikovat z odhadu celkové intenzity $\hat{\rho} = \frac{|X \cap W|}{|W|} = \mu \, \mathbb{E} L'$

Odhady parametrů

Pozorujeme (jednu) realizaci LCP na kompaktním okně W.

Odhady parametrů získáme metodou minimálního kontrastu (MCE) pro párovou korelační funkci g nebo pro K funkci

Minimalizací kontrastní míry

$$\int_r^R [\hat{K}^q(u) - K^q(u;\zeta)]^2 \,\mathrm{d}u$$

získáme $\zeta = (\sigma, \beta)$, kde σ značí (vektorový) parametr jádra k a $\beta = \frac{1}{\mu} \frac{\mathrm{Var} L'}{(\mathbb{E} L')^2}$.

μ a θ (nebo c v případě Poissonovy Lévyho báze) můžeme identifikovat z odhadu celkové intenzity $\hat{\rho} = \frac{|X \cap W|}{|W|} = \mu \, \mathbb{E} L'$

V simulační studii v Brix (99) pro G-shot-noise Coxovy procesy byla MCEK v některých případech numericky nestabilní, MCEg byla stabilnější.

Nestacionární Coxovy bodové procesy s Lévyho bází

Nestacionární LCP lze získat zředěním závislým na lokaci:

Buď X stacionární LCP pozorovaný na W a $f : W \to [0,1]$ s $\max_{u \in W} f(u) = 1$ funkce nehomogenity. Vymažme každý bod $x \in X$ s pravděpodobností $(1 - f(x))$. Nevymazané body potom tvoří zředěný proces X_f.

Nestacionární Coxovy bodové procesy s Lévyho bází

Nestacionární LCP lze získat zředěním závislým na lokaci:

Buď X stacionární LCP pozorovaný na W a $f : W \rightarrow [0,1]$ s $\max_{u \in W} f(u) = 1$ funkce nehomogenity. Vymažme každý bod $x \in X$ s pravděpodobností $(1 - f(x))$. Nevymazané body potom tvoří zředěný proces X_f.

Pro X_f máme: $\rho(u) = f(u)\mu\,\mathbb{E}L'$

$$g(u,v) = \frac{\rho^{(2)}(u,v)}{\rho(u)\rho(v)} = g_X(v-u) = 1 + \frac{\mathrm{Var}L'}{(\mathbb{E}L')^2}\,\frac{I_k(v-u)}{\mu}$$

Nestacionární LCP lze získat zředěním závislým na lokaci:

Buď X stacionární LCP pozorovaný na W a $f : W \to [0,1]$ s $\max_{u \in W} f(u) = 1$ funkce nehomogenity. Vymažme každý bod $x \in X$ s pravděpodobností $(1 - f(x))$. Nevymazané body potom tvoří zředěný proces X_f.

Pro X_f máme: $\rho(u) = f(u)\mu\,\mathbb{E}L'$

$$g(u,v) = \frac{\rho^{(2)}(u,v)}{\rho(u)\rho(v)} = g_X(v-u) = 1 + \frac{\mathrm{Var}L'}{(\mathbb{E}L')^2}\,\frac{I_k(v-u)}{\mu}$$

$\longrightarrow$ g je rovna g funkci původního nezředěného procesu X (Baddeley et al 2000).

Odhady pro nestacionární LCP

Dvoukrokový odhad:

1. odhad nestacionární ρ jádrovým zhlazením
2. odhad $\widehat{g}$ a minimálním kontrastem určeny k a β

μ a θ jsou opět identifikovány z celkové intenzity $\mu \mathbb{E}L' \int_W f(u)\,\mathrm{d}u$ a β.

Odhady pro nestacionární LCP

Dvoukrokový odhad:

1. odhad nestacionární ρ jádrovým zhlazením
2. odhad $\widehat{g}$ a minimálním kontrastem určeny k a β

μ a θ jsou opět identifikovány z celkové intenzity $\mu \mathbb{E} L' \int_W f(u) \mathrm{d}u$ a β.

Pro kvalitu získaných odhadů je velmi důležitá kvalita odhadu ρ
$\longrightarrow$ preferován parametrický tvar.

Odhady pro nestacionární LCP

Dvoukrokový odhad:

1. odhad nestacionární ρ jádrovým zhlazením
2. odhad $\widehat{g}$ a minimálním kontrastem určeny k a β

μ a θ jsou opět identifikovány z celkové intenzity $\mu \mathbb{E} L' \int_W f(u) \mathrm{d}u$ a β.

Pro kvalitu získaných odhadů je velmi důležitá kvalita odhadu ρ
$\longrightarrow$ preferován parametrický tvar.

Konzistence a asymptotická normalita pro parametrickou loglineární funkci nehomogenity – Waagepetersen & Guan (2009).

Časoprostorové Coxovy bodové procesy s Lévyho bází

$\mathrm{S} = W \times [0, T], \;\; W \subset \mathbb{R}^2, \;\; \mathcal{R} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$

Časoprostorová K funkce

$$K(r, t) = \int_{\|u\|<r} \int_{|s|<t} g(u, s) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}u$$

Můžeme aplikovat dvoukrokový postup – ale problém s dimenzionalitou.

Časoprostorové Coxovy bodové procesy s Lévyho bází

$\mathrm{S} = W \times [0, T], \quad W \subset \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{R} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$

Časoprostorová K funkce

$$K(r, t) = \int_{\|u\|<r} \int_{|s|<t} g(u, s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}u$$

Můžeme aplikovat dvoukrokový postup – ale problém s dimenzionalitou.

$\longrightarrow$ předpoklady na separabilitu některých částí modelu.

Časoprostorové Coxovy bodové procesy s Lévyho bází

Předpoklady:

- $f(u,s) = f_1(u)f_2(s)$ ... separabilita intenzity prvního řádu
- $k((u,s)(v,t)) = k_1(v-u)k_2(t-s), u \in W, s \in [0,T], v \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}$ ... separabilita zhlazovacího jádra

Celý model není separabilní, ani časoprostorová funkce g. Nicméně je dostatečně přístupný, a navíc časová i prostorová projekce tohoto procesu má zvladatelný tvar součinových hustot.

Stejné předpoklady na separabilitu jako v Møller & Ghorbani (2012).

Momentové charakteristiky

Označme

$$I_{k1}(v-u) = \int_{\mathbb{R}^2} k_1(v-w)k_1(u-w)\,\mathrm{d}w \quad I_{k2}(t-s) = \int_{\mathbb{R}} k_2(t-\tau)k_2(s-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Potom

$$\rho((u,s)) = \mu\,\mathbb{E}L'\, f_1(u)f_2(s)$$

$$g((u,s),(v,t)) = g((v-u),(t-s)) = 1 + \frac{\mathrm{Var}L'}{(\mathbb{E}L')^2}\,\frac{I_{k1}(v-u)I_{k2}(t-s)}{\mu}$$

$$K(r,t) = 2\pi r^2 t + \frac{\mathrm{Var}L'}{(\mathbb{E}L')^2}\,\frac{1}{\mu}\int_{\|u\|<r} I_{k1}(u)\,\mathrm{d}u \int_{|s|<t} I_{k2}(s)\,\mathrm{d}s$$

Projektované procesy

Pro inferenci lze s výhodou použít projektované procesy

Prostorový projektovaný proces $X_{\text{prostor}} = \{u : (u, t) \in X, t \in [0, T]\}$

Časový projektovaný proces $X_{\text{čas}} = \{t : (u, t) \in X, u \in W\}$

Viz Dvořák, Prokešová (2012) a následující prezentace.

References

Baddeley, A. J., Moller, J., Waagepetersen, R. (2000) *Non- and semi-parametric estimation of interaction in inhomogeneous point patterns.* Statist. Neerlandica **54**, 329–350

Brix, A. (1999) *Generalized gamma measures and shot-noise Cox processes.* Adv. Appl. Prob. **31**, 929–953.

Dvořák, J., Prokešová, M. (2012) *Statistics for inhomogeneous space-time shot-noise Cox processes.*, submitted.

Hellmund, G., Prokešová, M., Jensen, E.B.V. (2008) *Lévy based Cox point processes.* Adv. Appl. Prob. **40**, 603-629.

Møller, J. (2003) *Shot noise Cox processes.* Adv. Appl. Prob. **35**, 614–640.

Møller, J., Ghorbani, M. (2012) *Second-order analysis of structured inhomogeneous spatio-temporal point processes.* Statistica Neerlandica, to appear.

Waagepetersen, R. P., Guan, Y. (2009) *Two-step estimation for inhomogeneous spatial point processes.* JRSS B, **71**, 685–702.