Náhodná procházka na hierarchické grupě

Lucie Fajfrová
Ústav teorie informace a automatizace AV ČR

joint work with Jan Swart (UTIA), Noemi Kurt (TU Berlin)

ROBUST'12
Němčičky

Procházky v Eukleidovském prostoru

Náhodná procházka (symetrická) na $\mathbb{Z}^d$

je Markovský řetězec S_n, $n \in \mathbb{N}$

$$p(x, x+e) = \frac{1}{2^d} \text{ pro } |e| = 1$$

Eucleidovská norma na mříži

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, kde X_i nezávislé, stejně rozdělené

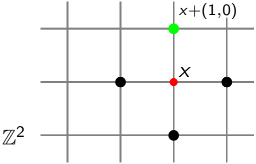
Procházky v Eukleidovském prostoru

Náhodná procházka (symetrická) na $\mathbb{Z}^d$

je Markovský řetězec S_n, $n \in \mathbb{N}$

$$p(x, x+e) = \frac{1}{2^d} \text{ pro } |e| = 1$$

Eucleidovská
norma na mříži



$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, kde X_i nezávislé,
stejně rozdělené

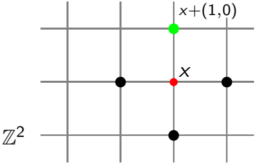
Procházky v Eukleidovském prostoru

Náhodná procházka (symetrická) na $\mathbb{Z}^d$

je Markovský řetězec S_n, $n \in \mathbb{N}$

$$p(x, x+e) = \frac{1}{2^d} \text{ pro } |e| = 1$$

Eucleidovská
norma na mříži



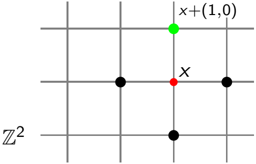
$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, kde X_i nezávislé,
stejně rozdělené

Náhodná procházka (symetrická) na $\mathbb{Z}^d$

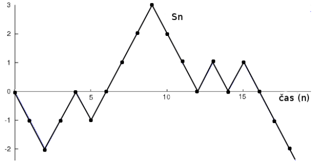
je Markovský řetězec S_n, $n \in \mathbb{N}$

$$p(x, x+e) = \frac{1}{2^d} \text{ pro } |e| = 1$$

Eucleidovská norma na mříži



$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, kde X_i nezávislé, stejně rozdělené



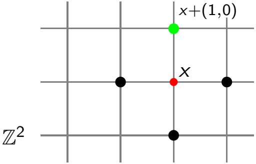
Procházky v Eukleidovském prostoru

Náhodná procházka (symetrická) na $\mathbb{Z}^d$

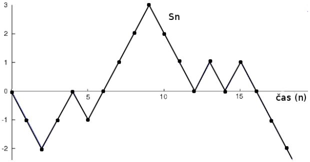
je Markovský řetězec $S_n,\ n \in \mathbb{N}$

$$p(x, x+e) = \frac{1}{2^d} \text{ pro } |e| = 1$$

Eucleidovská norma na mříži



$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, kde X_i nezávislé, stejně rozdělené

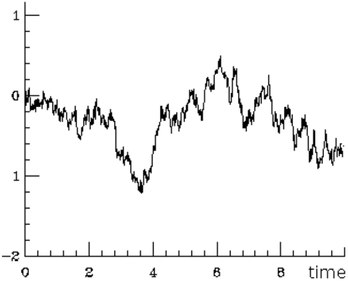


Brownův pohyb v $\mathbb{R}^d$

$B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^d)$ nezavislé BM

B_t^1 je proces se spojitými trajektoriemi $(B_0 = 0)$; má nezávislé a stacionární přírůstky

$$B_{t+h}^1 - B_t^1 \sim N(0, h)$$



škálování: $X_t = \sqrt{c}B(\frac{t}{c})$ je BM

Procházky v Eukleidovském prostoru

Náhodná procházka (symetrická) na $\mathbb{Z}^d$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,\ n \in \mathbb{N}$$

X_i i.i.d., $EX_1 = 0,\ VarX_1 = 1$

Brownův pohyb v $\mathbb{R}^d$

$$(B_t : t > 0)$$

Škálovací limita

smrštíme prostor (faktor $\sqrt{m}$) & zrychlíme čas (faktor m)

$$B_t = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{S_{mt}}{\sqrt{m}}\right)^{[lin]}_{[t=\frac{i}{m}:0\le i\le m]}$$

(konvergence v distribuci, Donsker)

Procházky v Eukleidovském prostoru

Náhodná procházka (symetrická) na $\mathbb{Z}^d$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \ n \in \mathbb{N}$$

X_i i.i.d., $EX_1 = 0$, $VarX_1 = 1$

Brownův pohyb v $\mathbb{R}^d$

$$(B_t : t > 0)$$

Škálovací limita

smrštíme prostor (faktor $\sqrt{m}$) & zrychlíme čas (faktor m)

$$B_t = \lim_{m \to \infty} \left(\frac{S_{mt}}{\sqrt{m}} \right)^{[lin]}_{[t = \frac{i}{m} : 0 \le i \le m]}$$ (konvergence v distribuci, Donsker)

Procházky v Eukleidovském prostoru

Náhodná procházka (symetrická) na $\mathbb{Z}^d$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,\ n \in \mathbb{N}$$

X_i i.i.d., $EX_1 = 0,\ VarX_1 = 1$

Brownův pohyb v $\mathbb{R}^d$

$$(B_t : t > 0)$$

Škálovací limita

smrštíme prostor (faktor $\sqrt{m}$) & zrychlíme čas (faktor m)

$$B_t = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{S_{mt}}{\sqrt{m}}\right)^{[lin]}_{[t=\frac{i}{m}:0\le i\le m]}$$

(konvergence v distribuci, Donsker)

Procházky v Eukleidovském prostoru

Náhodná procházka (symetrická) na $\mathbb{Z}^d$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,\ n \in \mathbb{N}$$

X_i i.i.d., $EX_1 = 0,\ VarX_1 = 1$

Brownův pohyb v $\mathbb{R}^d$

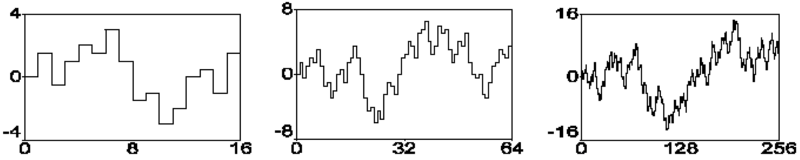
$$(B_t : t > 0)$$

Škálovací limita

smrštíme prostor (faktor $\sqrt{m}$) & zrychlíme čas (faktor m)

$$B_t = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{S_{mt}}{\sqrt{m}}\right)^{[lin]}_{[t=\frac{i}{m}:0\le i\le m]}$$

(konvergence v distribuci, Donsker)



mikroskop. $\dashrightarrow$ makroskop. pohled

Markovské časy procházek v Eukleidovském prostoru

Jaká je pr..st návratu do 0 vzhledem k postupujícímu času?

MCH se nazývá rekurentní pokud se (s.j.) navrací do 0 dostatečně často

Náhodná procházka (symetrická) na $\mathbb{Z}^d$

$(S_n : n \in \mathbb{N})$, $S_0 = 0$

- je rekurentní v dimenzi $d = 1, 2$

tj. $P(S_n{=}0 \text{ nekonečněkrát}){=}1$

tj. $P(\tau{=}\infty){=}0$ τ... čas 1.návratu do 0

- pro $d \geq 3$ je již možné, že se chodec nikdy nevrátí, tj. $P(\tau{<}\infty){<}1$

nicméně $\forall d$ $E\tau = \infty$

Brownův pohyb v $\mathbb{R}^d$

$(B_t : t > 0)$, $B_0 = 0$

- je rekurentní v dimenzi $d = 1, 2$ ve smyslu návratu do okolí
- je rekurentní jen pro $d = 1$ ve smyslu návratu do bodu

tj. $P(\forall t_0 \exists t{\geq}t_0 \; B_t{=}0){=}1$

- pro $d \geq 2$ je po nějakém čase možné že se BM nikdy do daného bodu nevrátí

tj. i když se chodec na jistotu vrací do 0, může to v průměru trvat “dost dlouho”

Markovské časy procházek v Eukleidovském prostoru

Jaká je pr..st návratu do 0 vzhledem k postupujícímu času?

MCH se nazývá rekurentní pokud se (s.j.) navrací do 0 dostatečně často

Náhodná procházka (symetrická) na $\mathbb{Z}^d$

$(S_n : n \in \mathbb{N})$, $S_0 = 0$

- je rekurentní v dimenzi $d = 1, 2$

tj. $P(S_n{=}0 \text{ nekonečněkrát}){=}1$

tj. $P(\tau{=}\infty){=}0$ τ... čas 1.návratu do 0

- pro $d \geq 3$ je již možné, že se chodec nikdy nevrátí, tj. $P(\tau{<}\infty){<}1$

nicméně $\forall d$ $E\tau = \infty$

Brownův pohyb v $\mathbb{R}^d$

$(B_t : t > 0)$, $B_0 = 0$

- je rekurentní v dimenzi $d = 1, 2$ ve smyslu návratu do okolí
- je rekurentní jen pro $d = 1$ ve smyslu návratu do bodu

tj. $P(\forall t_0 \exists t{\geq}t_0 \ B_t{=}0){=}1$

- pro $d \geq 2$ je po nějakém čase možné že se BM nikdy do daného bodu nevrátí

tj. i když se chodec na jistotu vrací do 0, může to v průměru trvat "dost dlouho"

Markovské časy procházek v Eukleidovském prostoru

Jaká je pr..st návratu do 0 vzhledem k postupujícímu času?

MCH se nazývá rekurentní pokud se (s.j.) navrací do 0 dostatečně často

Náhodná procházka (symetrická) na $\mathbb{Z}^d$

$(S_n : n \in \mathbb{N})$, $S_0 = 0$

- je rekurentní v dimenzi $d = 1, 2$

tj. $P(S_n{=}0 \text{ nekonečněkrát}){=}1$

tj. $P(\tau{=}\infty){=}0$ $\tau\dots$ čas 1.návratu do 0

- pro $d \geq 3$ je již možné, že se chodec nikdy nevrátí, tj. $P(\tau{<}\infty){<}1$

nicméně $\forall d$ $E\tau = \infty$

Brownův pohyb v $\mathbb{R}^d$

$(B_t : t > 0)$, $B_0 = 0$

- je rekurentní v dimenzi $d = 1, 2$ ve smyslu návratu do okolí
- je rekurentní jen pro $d = 1$ ve smyslu návratu do bodu

tj. $P(\forall t_0 \exists t{\geq}t_0 \;\; B_t{=}0){=}1$

- pro $d \geq 2$ je po nějakém čase možné že se BM nikdy do daného bodu nevrátí

tj. i když se chodec na jistotu vrací do 0, může to v průměru trvat “dost dlouho”

Markovské časy procházek v Eukleidovském prostoru

Jaká je pr..st návratu do 0 vzhledem k postupujícímu času?

MCH se nazývá rekurentní pokud se (s.j.) navrací do 0 dostatečně často

Náhodná procházka (symetrická) na $\mathbb{Z}^d$

$(S_n : n \in \mathbb{N})$, $S_0 = 0$

- je rekurentní v dimenzi $d = 1, 2$

tj. $P(S_n{=}0 \text{ nekonečněkrát}){=}1$

tj. $P(\tau{=}\infty){=}0$ τ... čas 1.návratu do 0

- pro $d \geq 3$ je již možné, že se chodec nikdy nevrátí, tj. $P(\tau{<}\infty){<}1$

nicméně $\forall d$ $E\tau = \infty$

Brownův pohyb v $\mathbb{R}^d$

$(B_t : t > 0)$, $B_0 = 0$

- je rekurentní v dimenzi $d = 1, 2$ ve smyslu návratu do okolí
- je rekurentní jen pro $d = 1$ ve smyslu návratu do bodu

  tj. $P(\forall t_0 \exists t{\geq}t_0 \; B_t{=}0){=}1$

- pro $d \geq 2$ je po nějakém čase možné že se BM nikdy do daného bodu nevrátí

tj. i když se chodec na jistotu vrací do 0, může to v průměru trvat “dost dlouho”

Markovské časy procházek v Eukleidovském prostoru

Jaká je pr..st návratu do 0 vzhledem k postupujícímu času?

MCH se nazývá rekurentní pokud se (s.j.) navrací do 0 dostatečně často

Náhodná procházka (symetrická) na $\mathbb{Z}^d$

$(S_n : n \in \mathbb{N})$, $S_0 = 0$

- je rekurentní v dimenzi $d = 1, 2$

tj. $P(S_n{=}0 \text{ nekonečněkrát}){=}1$

tj. $P(\tau{=}\infty){=}0$ τ... čas 1.návratu do 0

- pro $d \geq 3$ je již možné, že se chodec nikdy nevrátí, tj. $P(\tau{<}\infty){<}1$

nicméně $\forall d$ $E\tau = \infty$

Brownův pohyb v $\mathbb{R}^d$

$(B_t : t > 0)$, $B_0 = 0$

- je rekurentní v dimenzi $d = 1, 2$ ve smyslu návratu do okolí
- je rekurentní jen pro $d = 1$ ve smyslu návratu do bodu

tj. $P(\forall t_0 \exists t{\geq}t_0 \;\; B_t{=}0){=}1$

- pro $d \geq 2$ je po nějakém čase možné že se BM nikdy do daného bodu nevrátí

tj. i když se chodec na jistotu vrací do 0, může to v průměru trvat “dost dlouho”

Markovské časy procházek v Eukleidovském prostoru

Jaká je pr..st návratu do 0 vzhledem k postupujícímu času?

MCH se nazývá rekurentní pokud se (s.j.) navrací do 0 dostatečně často

Náhodná procházka (symetrická) na $\mathbb{Z}^d$

$(S_n : n \in \mathbb{N})$, $S_0 = 0$

- je rekurentní v dimenzi $d = 1, 2$

tj. $P(S_n{=}0 \text{ nekonečněkrát}){=}1$

tj. $P(\tau{=}\infty){=}0$ $\tau \ldots$ čas 1.návratu do 0

- pro $d \geq 3$ je již možné, že se chodec nikdy nevrátí, tj. $P(\tau{<}\infty){<}1$

nicméně $\forall d$ $E\tau = \infty$

Brownův pohyb v $\mathbb{R}^d$

$(B_t : t > 0)$, $B_0 = 0$

- je rekurentní v dimenzi $d = 1, 2$ ve smyslu návratu do okolí
- je rekurentní jen pro $d = 1$ ve smyslu návratu do bodu

tj. $P(\forall t_0 \exists t{\geq}t_0 \;\; B_t{=}0){=}1$

- pro $d \geq 2$ je po nějakém čase možné že se BM nikdy do daného bodu nevrátí

tj. i když se chodec na jistotu vrací do 0, může to v průměru trvat "dost dlouho"

ÚLOHA (široká)

asymptotické chování času τ_{12}, ve kterém se dva chodci,
tj. náhodné procházky/Brownovy pohyby, poprvé potkají

– předpok. nezávislé chování chodců, kteří startují z různých pozic v čase 0
– zřejmě: [2 nezáv. chodci + setkání] $\equiv$ [1 procházka + průchod 0]

✓ chceme setkání v konečném čase ($P(\tau_{12} < \infty) = 1$), tedy uvažujeme jen (bodově) rekurentní procházku; tj. $d = 1$; jenže $E\tau_{12} = \infty$

¿ nechceme na toto setkání čekat průměrně nekonečně dlouho

NÁPAD zkusme uvažovat **více procházek najednou**

Mějme 3 Brownovy pohyby,
$\tau := \tau_{12} \wedge \tau_{23} \wedge \tau_{31}$, τ_{ij}... čas 1.setkání i-té a j-té procházky

Heuréka! $E\tau < \infty$ $P(\tau \geq t) \sim t^{-3/2}$

Chtěli bychom nějak podchytit moment, kdy se $E\tau$ z nekonečné mění na konečnou – např. dimenzi $d > 1$ ale < 2

ÚLOHA (široká)

asymptotické chování času τ_{12}, ve kterém se dva chodci,
tj. náhodné procházky/Brownovy pohyby, poprvé potkají

– předpok. nezávislé chování chodců, kteří startují z různých pozic v čase 0
– zřejmě: [2 nezáv. chodci + setkání] $\equiv$ [1 procházka + průchod 0]

....

✓ chceme setkání v konečném čase ($P(\tau_{12} < \infty) = 1$), tedy uvažujeme jen (bodově) rekurentní procházku; tj. $d = 1$; jenže $E\tau_{12} = \infty$

¿ nechceme na toto setkání čekat průměrně nekonečně dlouho

NÁPAD zkusme uvažovat **více procházek najednou**

Mějme 3 Brownovy pohyby,

$\tau := \tau_{12} \wedge \tau_{23} \wedge \tau_{31}$, τ_{ij}... čas 1.setkání i-té a j-té procházky

Heuréka! $E\tau < \infty$ $P(\tau \geq t) \sim t^{-3/2}$

Chtěli bychom nějak podchytit moment, kdy se $E\tau$ z nekonečné mění na konečnou – např. dimenzi $d > 1$ ale < 2

↰

ÚLOHA (široká)

asymptotické chování času τ_{12}, ve kterém se dva chodci,
tj. náhodné procházky/Brownovy pohyby, poprvé potkají

– předpok. nezávislé chování chodců, kteří startují z různých pozic v čase 0
– zřejmě: [2 nezáv. chodci + setkání] $\equiv$ [1 procházka + průchod 0]

$\checkmark$ chceme setkání v konečném čase ($P(\tau_{12} < \infty) = 1$), tedy uvažujeme jen (bodově) rekurentní procházku; tj. $d = 1$; jenže $E\tau_{12} = \infty$

¿ nechceme na toto setkání čekat průměrně nekonečně dlouho

NÁPAD zkusme uvažovat **více procházek najednou**

Mějme 3 Brownovy pohyby,
$\tau := \tau_{12} \wedge \tau_{23} \wedge \tau_{31}$, τ_{ij}... čas 1.setkání i-té a j-té procházky

Heuréka! $E\tau < \infty$ $P(\tau \geq t) \sim t^{-3/2}$

Chtěli bychom nějak podchytit moment, kdy se $E\tau$ z nekonečné mění na konečnou – např. dimenzi $d > 1$ ale < 2

ÚLOHA (široká)

asymptotické chování času τ_{12}, ve kterém se dva chodci,
tj. náhodné procházky/Brownovy pohyby, poprvé potkají

– předpok. nezávislé chování chodců, kteří startují z různých pozic v čase 0
– zřejmě: [2 nezáv. chodci + setkání] $\equiv$ [1 procházka + průchod 0]

....

✓ chceme setkání v konečném čase ($P(\tau_{12} < \infty) = 1$), tedy uvažujeme jen (bodově) rekurentní procházku; tj. $d = 1$; jenže $E\tau_{12} = \infty$

¿ nechceme na toto setkání čekat průměrně nekonečně dlouho

NÁPAD zkusme uvažovat **více procházek najednou**

Mějme 3 Brownovy pohyby,

$\tau := \tau_{12} \wedge \tau_{23} \wedge \tau_{31}$, $\tau_{ij}\ldots$ čas 1.setkání i-té a j-té procházky

Heuréka! $E\tau < \infty$ $P(\tau \geq t) \sim t^{-3/2}$

Chtěli bychom nějak podchytit moment, kdy se $E\tau$ z nekonečné mění na konečnou – např. dimenzi $d > 1$ ale < 2

ÚLOHA (široká)

asymptotické chování času τ_{12}, ve kterém se dva chodci,
tj. náhodné procházky/Brownovy pohyby, poprvé potkají

– předpok. nezávislé chování chodců, kteří startují z různých pozic v čase 0
– zřejmě: [2 nezáv. chodci + setkání] $\equiv$ [1 procházka + průchod 0]

✓ chceme setkání v konečném čase ($P(\tau_{12} < \infty) = 1$), tedy uvažujeme jen (bodově) rekurentní procházku; tj. $d = 1$; jenže $E\tau_{12} = \infty$

¿ nechceme na toto setkání čekat průměrně nekonečně dlouho

NÁPAD zkusme uvažovat **více procházek najednou**

Mějme 3 Brownovy pohyby,
$\tau := \tau_{12} \wedge \tau_{23} \wedge \tau_{31}$, τ_{ij}... čas 1.setkání i-té a j-té procházky

Heuréka! $E\tau < \infty$ $P(\tau \geq t) \sim t^{-3/2}$

Chtěli bychom nějak podchytit moment, kdy se $E\tau$ z nekonečné mění na konečnou – např. dimenzi $d > 1$ ale < 2

ÚLOHA (široká)

asymptotické chování času τ_{12}, ve kterém se dva chodci,
tj. náhodné procházky/Brownovy pohyby, poprvé potkají

– předpok. nezávislé chování chodců, kteří startují z různých pozic v čase 0
– zřejmě: [2 nezáv. chodci + setkání] ≡ [1 procházka + průchod 0]

....

✓ chceme setkání v konečném čase ($P(\tau_{12} < \infty) = 1$), tedy uvažujeme jen (bodově) rekurentní procházku; tj. $d = 1$; jenže $E\tau_{12} = \infty$

¿ nechceme na toto setkání čekat průměrně nekonečně dlouho

NÁPAD zkusme uvažovat **více procházek najednou**

Mějme 3 Brownovy pohyby,
$\tau := \tau_{12} \wedge \tau_{23} \wedge \tau_{31}$, τ_{ij}... čas 1.setkání i-té a j-té procházky

Heuréka! $E\tau < \infty$ $P(\tau \geq t) \sim t^{-3/2}$

Chtěli bychom nějak podchytit moment, kdy se $E\tau$ z nekonečné mění na konečnou – např. dimenzi $d > 1$ ale < 2

ÚLOHA (široká)

asymptotické chování času τ_{12}, ve kterém se dva chodci,
tj. náhodné procházky/Brownovy pohyby, poprvé potkají

– předpok. nezávislé chování chodců, kteří startují z různých pozic v čase 0
– zřejmě: [2 nezáv. chodci + setkání] $\equiv$ [1 procházka + průchod 0]

....

✓ chceme setkání v konečném čase ($P(\tau_{12} < \infty) = 1$), tedy uvažujeme jen (bodově) rekurentní procházku; tj. $d = 1$; jenže $E\tau_{12} = \infty$

¿ nechceme na toto setkání čekat průměrně nekonečně dlouho

NÁPAD zkusme uvažovat **více procházek najednou**

Mějme 3 Brownovy pohyby,
$\tau := \tau_{12} \wedge \tau_{23} \wedge \tau_{31}$, τ_{ij}... čas 1.setkání i-té a j-té procházky

Heuréka! $E\tau < \infty$ $P(\tau \geq t) \sim t^{-3/2}$

Chtěli bychom nějak podchytit moment, kdy se $E\tau$ z nekonečné mění na konečnou – např. dimenzi $d > 1$ ale < 2

ÚLOHA (široká)

asymptotické chování času τ_{12}, ve kterém se dva chodci,
tj. náhodné procházky/Brownovy pohyby, poprvé potkají

– předpok. nezávislé chování chodců, kteří startují z různých pozic v čase 0
– zřejmě: [2 nezáv. chodci + setkání] $\equiv$ [1 procházka + průchod 0]

....

✓ chceme setkání v konečném čase ($P(\tau_{12} < \infty) = 1$), tedy uvažujeme jen (bodově) rekurentní procházku; tj. $d = 1$; jenže $E\tau_{12} = \infty$

¿ nechceme na toto setkání čekat průměrně nekonečně dlouho

NÁPAD zkusme uvažovat **více procházek najednou**

Mějme 3 Brownovy pohyby,
$\tau := \tau_{12} \wedge \tau_{23} \wedge \tau_{31}$, τ_{ij}... čas 1.setkání i-té a j-té procházky

Heuréka! $E\tau < \infty$ $P(\tau \geq t) \sim t^{-3/2}$

Chtěli bychom nějak podchytit moment, kdy se $E\tau$ z nekonečné mění na konečnou – např. dimenzi $d > 1$ ale < 2

↰

- původní Polyův problém (1920): jaká je pravděpodobnost, že se 2 nezávislí nahodní chodci v $\mathbb{Z}^d$ vůbec někdy potkají (s výsledkem: v $d = 1, 2$ skoro jistě, v $d \geq 3$ už to jisté není)
- vše o RW pro obecné d: *A Guide to First-Passage Processes.* Sidney Redner. Cambridge University Press. 2001.
- my v dalším zůstaneme u výpočetně snazšího BM
- D. Grabiner. *Brownian motion in a Weyl chamber, non-colliding particles, and random matrices*, Ann. Inst. H. Poincare Probab. Statist. 35:2, 177–204 (1999).

  Uvažuje k **nezávislých BM** $(d = 1)$ a spočte $P(\tau \geq t) = P(\text{no colision of k walkers up to time } t) \sim t^{\frac{-k(k-1)}{4}}$, $t \to \infty$
- Pro $d \geq 2$ se nic nemění ani s více procházkami, $E\tau = \infty$

Došli jsme k potřebě neceločíselné "dimenze" $\Rightarrow$ přejdeme od procházky na Eucleidovském prostoru k procházce na Hierarchické grupě (HG)

Hledáme totiž náh. procházky na prostoru $X(\gamma)$ tak, aby

$$P(\tau \geq t) \sim t^{-\gamma},\ t \to \infty$$

přičemž γ je spojitý parametr prostoru. A tedy mohu "odchytit"

$\gamma = 1$ odpovídající zlomu $E\tau$ z konečné na nekonečnou

....

ÚLOHA

Pro k rekurentních náhodných procházek na HG urči asymptotiku $P(\tau^{(k)} \geq t)$, kde $\tau^{(k)}$ je čas 1. setkání libovolných dvou z nich.

Došli jsme k potřebě neceločíselné "dimenze" $\Rightarrow$ přejdeme od procházky na Eucleidovském prostoru k procházce na Hierarchické grupě (HG)

Hledáme totiž náh. procházky na prostoru $X(\gamma)$ tak, aby

$$P(\tau \geq t) \sim t^{-\gamma},\ t \to \infty$$

přičemž γ je spojitý parametr prostoru. A tedy mohu "odchytit"

$$\gamma = 1 \text{ odpovídající zlomu } E\tau \text{ z konečné na nekonečnou}$$

....

ÚLOHA

Pro k rekurentních náhodných procházek na HG urči asymptotiku $P(\tau^{(k)} \geq t)$, kde $\tau^{(k)}$ je čas 1. setkání libovolných dvou z nich.

Došli jsme k potřebě neceločíselné "dimenze" $\Rightarrow$ přejdeme od procházky na Eucleidovském prostoru k procházce na Hierarchické grupě (HG)

Hledáme totiž náh. procházky na prostoru $X(\gamma)$ tak, aby

$$P(\tau \geq t) \sim t^{-\gamma},\ t \to \infty$$

přičemž γ je spojitý parametr prostoru. A tedy mohu "odchytit"

$\gamma = 1$ odpovídající zlomu $E\tau$ z konečné na nekonečnou

....

ÚLOHA

Pro k rekurentních náhodných procházek na HG urči asymptotiku $P(\tau^{(k)} \geq t)$, kde $\tau^{(k)}$ je čas 1. setkání libovolných dvou z nich.

Došli jsme k potřebě neceločíselné "dimenze" $\Rightarrow$ přejdeme od procházky na Eucleidovském prostoru k procházce na Hierarchické grupě (HG)

Hledáme totiž náh. procházky na prostoru $X(\gamma)$ tak, aby

$$P(\tau \geq t) \sim t^{-\gamma},\ t \to \infty$$

přičemž γ je spojitý parametr prostoru. A tedy mohu "odchytit"

$\gamma = 1$ odpovídající zlomu $E\tau$ z konečné na nekonečnou

....

ÚLOHA

Pro k rekurentních náhodných procházek na HG urči asymptotiku $P(\tau^{(k)} \geq t)$, kde $\tau^{(k)}$ je čas 1. setkání libovolných dvou z nich.

s N stupni volnosti

pro pevné $z \in \mathbb{Z}$ definujeme:

$$\Omega_N^z = \left\{ x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}, i \geq z} : \ \forall i \ x_i \in \{0, \ldots, N-1\} \ \& \ \exists n \forall i \geq n \ x_i = 0 \right\}$$

- se sčítaním po složkách modulo N jde o Abelovskou grupu
- označ $[x] := \inf\{k \in \mathbb{Z}, k \geq z : \ x_i = 0 \ \forall i \geq k\}$

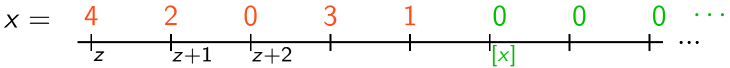
- $[x-y] = \inf\{k \geq z : \ x_i = y_i \ \forall i \geq k\}$ je "vzdálenost" (i záporná); čím je číslo menší, tím jsou x a y blíže; $x = y \ \equiv \ [x-y] = z$
- $[x-y] = \begin{cases} [x] \vee [y] & \text{když } [x] \neq [y] \\ \inf\{k : x_i = y_i \ \forall i \geq k\} & \text{když } [x] = [y] \end{cases}$
- s metrikou $d(x,y) = e^{[x-y]}$ je prostor lokálně kompaktní, tzv. ultrametrický (2 koule jsou buď disjunktní či vnořené)

s N stupni volnosti

pro pevné $z \in \mathbb{Z}$ definujeme:

$$\Omega_N^z = \left\{ x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}, i \geq z} : \ \forall i \ x_i \in \{0, ..., N-1\} \ \& \ \exists n \forall i \geq n \ x_i = 0 \right\}$$

- se sčítaním po složkách modulo N jde o Abelovskou grupu
- označ $[x] := \inf\{k \in \mathbb{Z}, k \geq z : \ x_i = 0 \ \forall i \geq k\}$



- $[x-y] = \inf\{k \geq z : \ x_i = y_i \ \forall i \geq k\}$ je “vzdálenost” (i záporná); čím je číslo menší, tím jsou x a y blíže; $x = y \ \equiv \ [x-y] = z$
- $[x-y] = \begin{cases} [x] \vee [y] & \text{když } [x] \neq [y] \\ \inf\{k : x_i = y_i \ \forall i \geq k\} & \text{když } [x] = [y] \end{cases}$
- s metrikou $d(x,y) = e^{[x-y]}$ je prostor lokálně kompaktní, tzv. ultrametrický (2 koule jsou buď disjunktní či vnořené)

Hierarchická grupa (spočetná)

s N stupni volnosti

pro pevné $z \in \mathbb{Z}$ definujeme:

$$\Omega_N^z = \left\{ x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}, i \geq z} : \ \forall i \ x_i \in \{0, ..., N-1\} \ \& \ \exists n \forall i \geq n \ x_i = 0 \right\}$$

- se sčítaním po složkách modulo N jde o Abelovskou grupu
- označ $[x] := \inf\{k \in \mathbb{Z}, k \geq z : \ x_i = 0 \ \forall i \geq k\}$

$$\begin{array}{lcccccccccl} x = & 4 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ & z & z+1 & z+2 & & & [x] & & & \dots \end{array}$$

- $[x-y] = \inf\{k \geq z : \ x_i = y_i \ \forall i \geq k\}$ je "vzdálenost" (i záporná); čím je číslo menší, tím jsou x a y blíže; $x = y \ \equiv \ [x-y] = z$
- $[x-y] = \begin{cases} [x] \vee [y] & \text{když } [x] \neq [y] \\ \inf\{k : x_i = y_i \ \forall i \geq k\} & \text{když } [x] = [y] \end{cases}$
- s metrikou $d(x,y) = e^{[x-y]}$ je prostor lokálně kompaktní, tzv. ultrametrický (2 koule jsou buď disjunktní či vnořené)

s N stupni volnosti

pro pevné $z \in \mathbb{Z}$ definujeme:

$$\Omega_N^z = \Big\{ x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}, i \geq z} : \ \forall i \ x_i \in \{0, ..., N-1\} \ \& \ \exists n \forall i \geq n \ x_i = 0 \Big\}$$

- se sčítaním po složkách modulo N jde o Abelovskou grupu
- označ $[x] := \inf\{k \in \mathbb{Z}, k \geq z : \ x_i = 0 \ \forall i \geq k\}$

$$x = \begin{array}{cccccccccc} 4 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \hline z & z+1 & z+2 & & & [x] & & & \cdots \end{array}$$

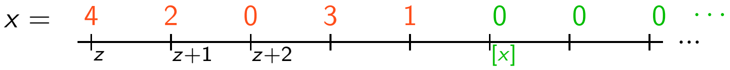
- $[x-y] = \inf\{k \geq z : \ x_i = y_i \ \forall i \geq k\}$ je "vzdálenost" (i záporná); čím je číslo menší, tím jsou x a y blíže; $x = y \ \equiv \ [x-y] = z$
- $[x-y] = \begin{cases} [x] \vee [y] & \text{když } [x] \neq [y] \\ \inf\{k : x_i = y_i \ \forall i \geq k\} & \text{když } [x] = [y] \end{cases}$
- s metrikou $d(x,y) = e^{[x-y]}$ je prostor lokálně kompaktní, tzv. ultrametrický (2 koule jsou buď disjunktní či vnořené)

s N stupni volnosti

pro pevné $z \in \mathbb{Z}$ definujeme:

$$\Omega_N^z = \left\{ x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}, i \geq z} : \ \forall i \ x_i \in \{0, ..., N-1\} \ \& \ \exists n \forall i \geq n \ x_i = 0 \right\}$$

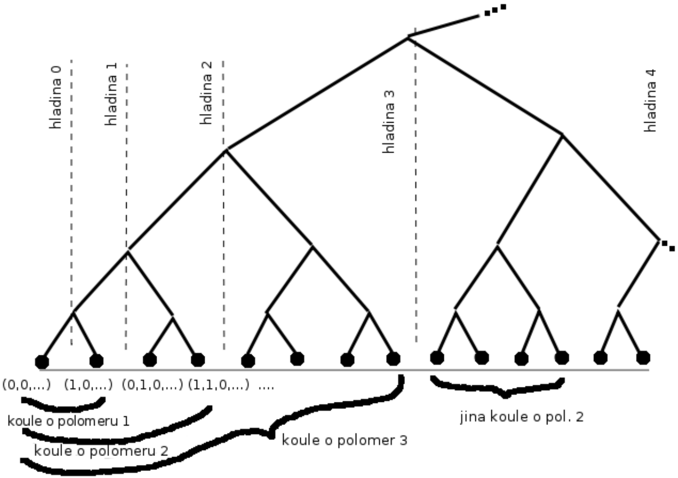
- se sčítaním po složkách modulo N jde o Abelovskou grupu
- označ $[x] := \inf\{k \in \mathbb{Z}, k \geq z : \ x_i = 0 \ \forall i \geq k\}$



- $[x-y] = \inf\{k \geq z : \ x_i = y_i \ \forall i \geq k\}$ je "vzdálenost" (i záporná); čím je číslo menší, tím jsou x a y blíže; $x = y \ \equiv \ [x-y] = z$
- $[x-y] = \begin{cases} [x] \vee [y] & \text{když } [x] \neq [y] \\ \inf\{k : x_i = y_i \ \forall i \geq k\} & \text{když } [x] = [y] \end{cases}$
- s metrikou $d(x,y) = e^{[x-y]}$ je prostor lokálně kompaktní, tzv. ultrametrický (2 koule jsou buď disjunktní či vnořené)

s $N = 2$ stupni volnosti

$$\Omega_2^0 = \left\{ x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} : \ \forall i \ x_i \in \{0,1\} \ \& \ \exists n \forall i \geq n \ x_i = 0 \right\}$$



Fixuj parametr $\theta \in (0,1)$.

HRW $\left(\xi_t^z\right)_{t\geq 0}$ je Markovský proces (spočetná stav.množina, spojitý čas) na Ω_N^z definovaný intenzitami přechodů:

ze stavu x vyskočim s intenzitou $(1-\theta)\theta^{k-1}$, pro nějaké $k = 1, 2, \ldots$, do lib. náhodně zvoleného y v kouli $\{y : \ [x-y] \leq k\}$

- HRW je rekurentní $\equiv \theta \leq \frac{1}{N}$
- $P(\xi_t^z = 0) \sim f(t)t^{-\alpha}$ kde $\alpha = \frac{\log(N)}{-\log(\theta)}$

Analogie (ve smyslu asymptot. chování $P(\tau \geq t)$) s RW na $\mathbb{Z}^d$:

$\alpha = \frac{d}{2}$ tzn. $\theta = \frac{1}{N^{2/d}}$

• D. Dawson , L. Gorostiza, A. Wakolbinger, Occupation time fluctuations in branching systems. J. Theoretical Probab. 14 (2001) 729-796.

• D.A. Dawson, L.G. Gorostiza and A. Wakolbinger, Degrees of transience and recurrence and hierarchical random walks. Potential Analysis (2005) 22: 305-350.

Fixuj parametr $\theta \in (0,1)$.

HRW $\left(\xi_t^z\right)_{t\geq 0}$ je Markovský proces (spočetná stav.množina, spojitý čas) na Ω_N^z definovaný intenzitami přechodů:

ze stavu x vyskočim s intenzitou $(1-\theta)\theta^{k-1}$, pro nějaké $k = 1, 2, \ldots,$ do lib. náhodně zvoleného y v kouli $\{y : \ [x-y] \leq k\}$

- HRW je rekurentní $\equiv \theta \leq \frac{1}{N}$
- $P(\xi_t^z = 0) \sim f(t)t^{-\alpha}$ kde $\alpha = \frac{\log(N)}{-\log(\theta)}$

Analogie (ve smyslu asymptot. chování $P(\tau \geq t)$) s RW na $\mathbb{Z}^d$:

$\alpha = \frac{d}{2}$ tzn. $\theta = \frac{1}{N^{2/d}}$

....

• D. Dawson , L. Gorostiza, A. Wakolbinger, Occupation time fluctuations in branching systems. J. Theoretical Probab. 14 (2001) 729-796.

• D.A. Dawson, L.G. Gorostiza and A. Wakolbinger, Degrees of transience and recurrence and hierarchical random walks. Potential Analysis (2005) 22: 305-350.

Fixuj parametr $\theta \in (0, 1)$.

HRW $\left(\xi_t^z\right)_{t\geq 0}$ je Markovský proces (spočetná stav.množina, spojitý čas) na Ω_N^z definovaný intenzitami přechodů:

ze stavu x vyskočim s intenzitou $(1-\theta)\theta^{k-1}$, pro nějaké $k = 1, 2, \ldots$, do lib. náhodně zvoleného y v kouli $\{y : [x-y] \leq k\}$

- HRW je rekurentní $\equiv \theta \leq \frac{1}{N}$
- $P(\xi_t^z = 0) \sim f(t)t^{-\alpha}$ kde $\alpha = \frac{\log(N)}{-\log(\theta)}$

Analogie (ve smyslu asymptot. chování $P(\tau \geq t)$) s RW na $\mathbb{Z}^d$:

$\alpha = \frac{d}{2}$ tzn. $\theta = \frac{1}{N^{2/d}}$

• D. Dawson , L. Gorostiza, A. Wakolbinger, Occupation time fluctuations in branching systems. J. Theoretical Probab. 14 (2001) 729-796.

• D.A. Dawson, L.G. Gorostiza and A. Wakolbinger, Degrees of transience and recurrence and hierarchical random walks. Potential Analysis (2005) 22: 305-350.

Fixuj parametr $\theta \in (0, 1)$.

HRW $\left(\xi_t^z\right)_{t\geq 0}$ je Markovský proces (spočetná stav.množina, spojitý čas) na Ω_N^z definovaný intenzitami přechodů:

ze stavu x vyskočím s intenzitou $(1-\theta)\theta^{k-1}$, pro nějaké $k = 1, 2, \ldots,$ do lib. náhodně zvoleného y v kouli $\{y : \ [x-y] \leq k\}$

- HRW je rekurentní $\equiv \theta \leq \frac{1}{N}$
- $P(\xi_t^z = 0) \sim f(t)t^{-\alpha}$ kde $\alpha = \frac{\log(N)}{-\log(\theta)}$

Analogie (ve smyslu asymptot. chování $P(\tau \geq t)$) s RW na $\mathbb{Z}^d$:

$\alpha = \frac{d}{2}$ tzn. $\theta = \frac{1}{N^{2/d}}$

....

• D. Dawson , L. Gorostiza, A. Wakolbinger, Occupation time fluctuations in branching systems. J. Theoretical Probab. 14 (2001) 729-796.

• D.A. Dawson, L.G. Gorostiza and A. Wakolbinger, Degrees of transience and recurrence and hierarchical random walks. Potential Analysis (2005) 22: 305-350.

zaveďme operátor $S : \Omega_N^z \to \Omega_N^{z-1}$, $\quad (Sx)_i := x_{i+1} \quad \forall\, i \geq z-1$

S škáluje vzdálenosti faktorem e^{-1}

Škálovací vlastnost HRW: procesy $\left(S(\xi_t^z)\right)_{t\geq 0}$ a $\left(\xi_{\theta t}^{z-1}\right)_{t\geq 0}$ mají stejné rozdělení

....

Škálovací limita:

spočetná hierar. grupa Ω_N^z spojitá hierar. grupa $\Omega_N^{\mathbb{Z}}$

$z \to -\infty$

prostorové vzdálenosti srazíme faktorem e^{-1}, čas zrychlíme faktorm θ^{-1}

náhodná procházka ξ_t^z Lévyho proces ξ_t

(proces s nezávislými a stacionárními přírůstky, "cadlag" trajektorie)

• Konstrukce Lévyho procesu ξ_t: S. Evans, Local properties of Lévy processes on totally disconnected groups, J. Theor. Probab. 2 (1989), 209–259.

zaveďme operátor $S : \Omega_N^z \to \Omega_N^{z-1}$, $\quad (Sx)_i := x_{i+1} \quad \forall\, i \geq z-1$

S škáluje vzdálenosti faktorem e^{-1}

Škálovací vlastnost HRW: procesy $\left(S(\xi_t^z)\right)_{t\geq 0}$ a $\left(\xi_{\theta t}^{z-1}\right)_{t\geq 0}$ mají stejné rozdělení

....

Škálovací limita :

spočetná hierar. grupa Ω_N^z | spojitá hierar. grupa $\Omega_N^{\mathbb{Z}}$

$z \to -\infty$

prostorové vzdálenosti srazíme faktorem e^{-1}, čas zrychlíme faktorm θ^{-1}

náhodná procházka ξ_t^z | Lévyho proces ξ_t

(proces s nezávislými a stacionárními přírůstky, "cadlag" trajektorie)

• Konstrukce Lévyho procesu ξ_t: S. Evans, Local properties of Lévy processes on totally disconnected groups, J. Theor. Probab. 2 (1989), 209–259.

zaveďme operátor $S : \Omega_N^z \to \Omega_N^{z-1}$, $\quad (Sx)_i := x_{i+1} \quad \forall\, i \geq z-1$

S škáluje vzdálenosti faktorem e^{-1}

Škálovací vlastnost HRW: procesy $\left(S(\xi_t^z)\right)_{t\geq 0}$ a $\left(\xi_{\theta t}^{z-1}\right)_{t\geq 0}$ mají stejné rozdělení

Škálovací limita :

spočetná hierar. grupa Ω_N^z spojitá hierar. grupa $\Omega_N^{\mathbb{Z}}$

$z \to -\infty$

prostorové vzdálenosti srazíme faktorem e^{-1}, čas zrychlíme faktorm θ^{-1}

náhodná procházka ξ_t^z Lévyho proces ξ_t

(proces s nezávislými a stacionárními přírůstky, "cadlag" trajektorie)

• Konstrukce Lévyho procesu ξ_t: S. Evans, Local properties of Lévy processes on totally disconnected groups, J. Theor. Probab. 2 (1989), 209–259.

zaveďme operátor $S : \Omega_N^z \to \Omega_N^{z-1}$, $\quad (Sx)_i := x_{i+1} \quad \forall\, i \geq z-1$

S škáluje vzdálenosti faktorem e^{-1}

Škálovací vlastnost HRW: procesy $\left(S(\xi_t^z)\right)_{t\geq 0}$ a $\left(\xi_{\theta t}^{z-1}\right)_{t\geq 0}$ mají stejné rozdělení

....

Škálovací limita:

spočetná hierar. grupa Ω_N^z — spojitá hierar. grupa $\Omega_N^{\mathbb{Z}}$

$z \to -\infty$

prostorové vzdálenosti srazíme faktorem e^{-1}, čas zrychlíme faktorm θ^{-1}

náhodná procházka ξ_t^z — Lévyho proces ξ_t

(proces s nezávislými a stacionárními přírůstky, "cadlag" trajektorie)

• Konstrukce Lévyho procesu ξ_t: S. Evans, Local properties of Lévy processes on totally disconnected groups, J. Theor. Probab. 2 (1989), 209–259.

- ξ_t je (bodově) rekurentní $\equiv \theta < \frac{1}{N}$
- $P(\tau \geq t) \sim t^{-\beta}$ kde $\beta = 1 + \frac{\log(N)}{\log(\theta)}$
- opět spec. volba $\theta = \frac{1}{N^2}$ ukazuje na analogii k BM na $\mathbb{R}$, kde asymptotika je $t^{-1/2}$
- nicméně i jakákoliv jiná volba vede na výsledek $E\tau = \infty$ nebot $\beta < 1$

HYPOTEZA: (zatím jen numerické výsledky)

Mějme 3 Lévyho procesy $\xi_t^1, \xi_t^2, \xi_t^3$,
$\tau := \tau_{12} \wedge \tau_{23} \wedge \tau_{31}$, $\tau_{ij} \ldots$ čas 1.setkání i-té a j-té procházky
Potom $P(\tau \geq t) \sim t^{-\beta_3}$ kde $\beta_3 = \beta_3(\theta, N)$

přičmž volbou parametrů lze docílit $\beta_3(\theta, N) = 1$.

- ξ_t je (bodově) rekurentní $\equiv \theta < \frac{1}{N}$
- $P(\tau \geq t) \sim t^{-\beta}$ kde $\beta = 1 + \frac{\log(N)}{\log(\theta)}$
- opět spec. volba $\theta = \frac{1}{N^2}$ ukazuje na analogii k BM na $\mathbb{R}$, kde asymptotika je $t^{-1/2}$
- nicméně i jakákoliv jiná volba vede na výsledek $E\tau = \infty$ nebot $\beta < 1$

HYPOTEZA: (zatím jen numerické výsledky)

Mějme 3 Lévyho procesy $\xi_t^1, \xi_t^2, \xi_t^3$,

$\tau := \tau_{12} \wedge \tau_{23} \wedge \tau_{31}$, $\tau_{ij}\dots$ čas 1.setkání i-té a j-té procházky

Potom $P(\tau \geq t) \sim t^{-\beta_3}$ kde $\beta_3 = \beta_3(\theta, N)$

přičmž volbou parametrů lze docílit $\beta_3(\theta, N) = 1$.

- ξ_t je (bodově) rekurentní $\equiv \theta < \frac{1}{N}$
- $P(\tau \geq t) \sim t^{-\beta}$ kde $\beta = 1 + \frac{\log(N)}{\log(\theta)}$
- opět spec. volba $\theta = \frac{1}{N^2}$ ukazuje na analogii k BM na $\mathbb{R}$, kde asymptotika je $t^{-1/2}$
- nicméně i jakákoliv jiná volba vede na výsledek $E\tau = \infty$ nebot $\beta < 1$

HYPOTEZA: (zatím jen numerické výsledky)

Mějme 3 Lévyho procesy $\xi_t^1, \xi_t^2, \xi_t^3$,

$\tau := \tau_{12} \wedge \tau_{23} \wedge \tau_{31}$, $\tau_{ij}\ldots$ čas 1.setkání i-té a j-té procházky

Potom $P(\tau \geq t) \sim t^{-\beta_3}$ kde $\beta_3 = \beta_3(\theta, N)$

přičmž volbou parametrů lze docílit $\beta_3(\theta, N) = 1$.

- ξ_t je (bodově) rekurentní $\equiv \theta < \frac{1}{N}$
- $P(\tau \geq t) \sim t^{-\beta}$ kde $\beta = 1 + \frac{\log(N)}{\log(\theta)}$
- opět spec. volba $\theta = \frac{1}{N^2}$ ukazuje na analogii k BM na $\mathbb{R}$, kde asymptotika je $t^{-1/2}$
- nicméně i jakákoliv jiná volba vede na výsledek $E\tau = \infty$ neboť $\beta < 1$

HYPOTEZA: (zatím jen numerické výsledky)

Mějme 3 Lévyho procesy $\xi_t^1, \xi_t^2, \xi_t^3$,
$\tau := \tau_{12} \wedge \tau_{23} \wedge \tau_{31}$, $\tau_{ij} \ldots$ čas 1.setkání i-té a j-té procházky
Potom $P(\tau \geq t) \sim t^{-\beta_3}$ kde $\beta_3 = \beta_3(\theta, N)$

přičmž volbou parametrů lze docílit $\beta_3(\theta, N) = 1$.

- ξ_t je (bodově) rekurentní $\equiv \theta < \frac{1}{N}$
- $P(\tau \geq t) \sim t^{-\beta}$ kde $\beta = 1 + \frac{\log(N)}{\log(\theta)}$
- opět spec. volba $\theta = \frac{1}{N^2}$ ukazuje na analogii k BM na $\mathbb{R}$, kde asymptotika je $t^{-1/2}$
- nicméně i jakákoliv jiná volba vede na výsledek $E\tau = \infty$ neboť $\beta < 1$

HYPOTEZA: (zatím jen numerické výsledky)

Mějme 3 Lévyho procesy $\xi_t^1, \xi_t^2, \xi_t^3$,
$\tau := \tau_{12} \wedge \tau_{23} \wedge \tau_{31}$, $\tau_{ij}\ldots$ čas 1.setkání i-té a j-té procházky
Potom $P(\tau \geq t) \sim t^{-\beta_3}$ kde $\beta_3 = \beta_3(\theta, N)$

přičmž volbou parametrů lze docílit $\beta_3(\theta, N) = 1$.

- ξ_t je (bodově) rekurentní $\equiv \theta < \frac{1}{N}$
- $P(\tau \geq t) \sim t^{-\beta}$ kde $\beta = 1 + \frac{\log(N)}{\log(\theta)}$
- opět spec. volba $\theta = \frac{1}{N^2}$ ukazuje na analogii k BM na $\mathbb{R}$, kde asymptotika je $t^{-1/2}$
- nicméně i jakákoliv jiná volba vede na výsledek $E\tau = \infty$ nebot $\beta < 1$

HYPOTEZA: (zatím jen numerické výsledky)

Mějme 3 Lévyho procesy $\xi_t^1, \xi_t^2, \xi_t^3$,
$\tau := \tau_{12} \wedge \tau_{23} \wedge \tau_{31}$, τ_{ij}... čas 1.setkání i-té a j-té procházky

Potom $P(\tau \geq t) \sim t^{-\beta_3}$ kde $\beta_3 = \beta_3(\theta, N)$

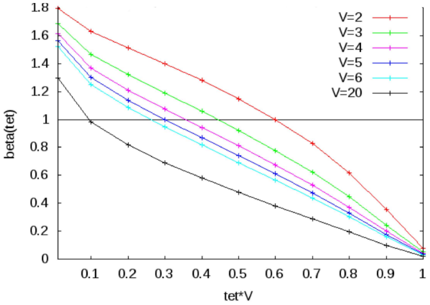
přičmž volbou parametrů lze docílit $\beta_3(\theta, N) = 1$.

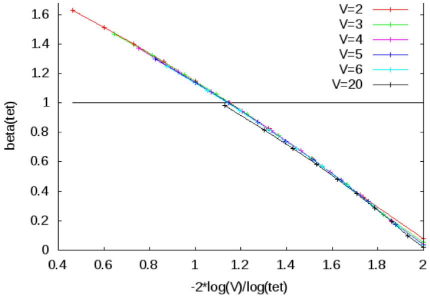
- ξ_t je (bodově) rekurentní $\equiv \theta < \frac{1}{N}$
- $P(\tau \geq t) \sim t^{-\beta}$ kde $\beta = 1 + \frac{\log(N)}{\log(\theta)}$
- opět spec. volba $\theta = \frac{1}{N^2}$ ukazuje na analogii k BM na $\mathbb{R}$, kde asymptotika je $t^{-1/2}$
- nicméně i jakákoliv jiná volba vede na výsledek $E\tau = \infty$ nebot $\beta < 1$

HYPOTEZA: (zatím jen numerické výsledky)

Mějme 3 Lévyho procesy $\xi_t^1, \xi_t^2, \xi_t^3$,
$\tau := \tau_{12} \wedge \tau_{23} \wedge \tau_{31}$, $\tau_{ij}\ldots$ čas 1.setkání i-té a j-té procházky
Potom $P(\tau \geq t) \sim t^{-\beta_3}$ kde $\beta_3 = \beta_3(\theta, N)$

přičmž volbou parametrů lze docílit $\beta_3(\theta, N) = 1$.


V=2
V=3
V=4
V=5
V=6
V=20
beta(tet)
tet*V
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


V=2
V=3
V=4
V=5
V=6
V=20
beta(tet)
-2*log(V)/log(tet)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2