Časoprostorové bodové procesy a jejich aplikace

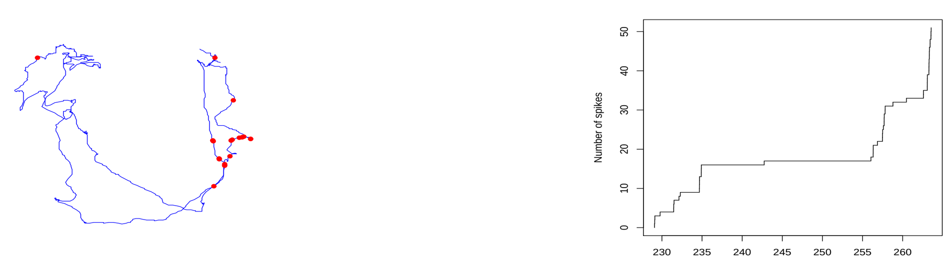
Blažena Frcalová a Viktor Beneš
frcalova@karlin.mff.cuni.cz
Univerzita Karlova v Praze, Česká Republika

ABSTRAKT

Časoprostorové bodové procesy mají uplatnění v různých aplikacích, např. v neurofyziologii, kde pomáhají modelovat elektrické impulsy v mozku (spiky). Na reálných datech získaných z neuronu potkana pohybujícího se v aréně a hledajícího potravu jsou odhadnuty charakteristiky experimentu. Jsou zde prezentovány dva přístupy. První přístup je znám z literatury a je založen na rekurzivních rovnicích. Druhý přístup používá bodový shot-noise Cox proces.

DATA

(Klement 2006)
Je známo, že aktivita neuronové buňky části hypocampu se mění v závislosti na poloze zvířete a je vysoká v jedné určité oblasti, zatímco jinde je nízká. Naše data obsahují polohu potkana v čase a časy elektrických impulzů.



Trasa potkana v kruhové aréně s vyznačenými spiky - červené křížky (vlevo) a časový vývoj počtu spiků (vpravo) (Klement 2006).

REKURZIVNÍ METODA

(Eden a kol. 2004)
V první metodě uvažujeme podmíněnou intenzitu λ^* danou vektorem parametrů ψ, které se mění v diskrétním čase. Předpokládejme $\triangle > 0$ dostatečně malé, $\triangle N_k$ indikátor události (spiku) v intervalu $((k-1)\triangle, k\triangle]$. Označme $N_{1:k} = [\triangle N_1, \ldots, \triangle N_k]$ and $\psi_{1:k} = [\psi_1, \ldots, \psi_k]$ a $\lambda_k^* = \lambda^*(k\triangle|\psi_k, N_{1:k-1})$.

Stavová rovnice
$$\psi_k = F\psi_{k-1} + \eta_k$$
s pevně danou maticí F a Gaussovským šumem η_k s nulovou střední hodnotou a kovarianční maticí Q_k.

Rekurzivní systém rovnic pro výpočet aposteriorní hustoty $p(\psi_k|N_{1:k})$:
$$p(\psi_k|N_{1:k}) = \frac{p(\psi_k|N_{1:k-1})p(\triangle N_k|N_{1:k-1}, \psi_k)}{p(\triangle N_k|N_{1:k-1})}$$
$$p(\psi_k|N_{1:k-1}) = \int p(\psi_k|\psi_{k-1})p(\psi_{k-1}|N_{1:k-1})d\psi_{k-1}.$$
$$p(\triangle N_k|N_{1:k-1}, \psi_k) = (\lambda_k\triangle)^{(\triangle N_k)}\exp(-\lambda_k\triangle)$$

Označme $\psi_{k|k}$, $W_{k|k}$, $\psi_{k|k-1}$, $W_{k|k-1}$ vektor středních hodnot a kovarianční matice $(\psi_k|N_{1:k})$ a $(\psi_k|N_{1:k-1})$
$$\psi_{k|k-1} = F\psi_{k-1|k-1},\ W_{k|k-1} = FW_{k-1|k-1}F' + Q_k$$
$$W_{k|k}^{-1} = W_{k|k-1}^{-1} + \left[(\frac{\partial \log \lambda_k^*}{\partial \psi_k})'\lambda_k^*\triangle\frac{\partial \log \lambda_k^*}{\partial \psi_k} - (\triangle N_k - \lambda_k^*\triangle)\frac{\partial^2 \log \lambda_k^*}{\partial \psi_k \partial \psi_k'}\right]_{|\psi_{k|k-1}}$$
$$\psi_{k|k} = \psi_{k|k-1} + W_{k|k}\left[(\frac{\partial \log \lambda_k^*}{\partial \psi_k})'(\triangle N_k - \lambda_k^*\triangle)\right]_{|\psi_{k|k-1}}$$
pro $k = 1, 2, \ldots$

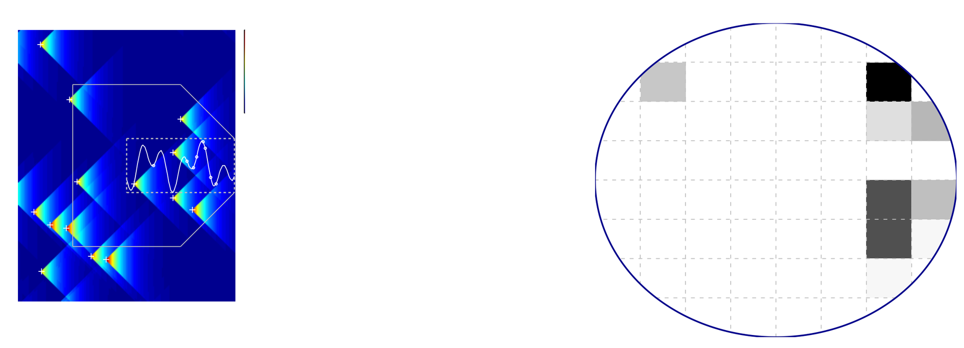
Průměrná podmíněná intenzita ve dvou navazujících intervalech.

COXŮV PROCES

Pohyb potkana v aréně je popsán pomocí zobrazení $y : [0, T] \to \mathbb{R}^2$. Definujme časoprostorový Coxův bodový proces X_Y s událostmi na křivce Y takový, že při dané realizaci $\Lambda = \lambda$ má počet bodů (spiků) v množině $B \subset \mathcal{B}^2$ a v časovém rozmezí $[0 \le t_1 < t_2 \le T]$ Poissonovo rozdělení se střední hodnotou $\int_{t_1}^{t_2} I_B(y_t)\lambda(t, y_t)dt$.

Uvažujme neznámou řídící funkci intenzity
$$\Lambda(\xi) = \sum_j w_j g(\xi, \phi_j),\ \xi \in \mathbb{R}^3,$$
kde ϕ_j jsou události časoprostorového Poissonova procesu Z s funkcí intenzity ρ, $w_j > 0$ jsou nezávislé stejně rozdělené skoky a $g((t,\sigma),(s,\rho)) = \mathbf{1}_{[-\infty,t]}(s)\mathbf{1}_{B_{s-t}(\sigma)}(\rho)e^{\gamma(s-t)}$ je nezáporná deterministická funkce, $B_s(\sigma) = \{\eta \in \mathbb{R}^d;\ \chi(\eta,\sigma) \le -us\}$, $s \le 0$ pro metriku χ na $\mathbb{R}^d$, $\gamma, u > 0$ parametry modelu. .

$\mathsf{E}[\Lambda|X_Y]$ není daná explicitně, ale máme Bayesův vzorec pro pravděpodobnostní hustoty
$$f(\lambda|x_Y) \propto f(x_Y|\lambda)f(\lambda),$$
kde $f(x_Y|\lambda)$ je hustota Poissonova procesu.
$$f(Z, b|x_Y) \propto f(x_Y|Z, b)f(Z|b)f(b),$$
$Z = \{\eta_j, w_j\} = \{z_j, t_j, w_j\}$, z_j, $x = \{\tau_j\}$ realizace bodového procesu, b vektor parametrů.



Vlevo:.Horizontální a vertikální osy představují čas a prostor. V okně W (obdélník) je znázorněna trasa potkana se spiky. Křížky značí události pomocného procesu Z. Příspěvek každé události procesu Z k řídící funkci intenzity Λ je znázorněn barevně. Vpravo: výpočet řídící míry intenzity pro jednotlivé úseky arény.

Poděkování: Tento výzkum byl podporován grantem Grantové agentury Akademie věd České republiky (IAA101120604).

Literatura

[1] V. Beneš, B. Frcalová, D.Klement, P. Lánský, Overdispersion in the Place Cell Discharge - Stochastic Modelling and Inference, CP1028 Collective Dynamics: Topics on Competition and Cooperation in the Biosciences edited by L.M.Ricciardi, A. Buonocore, and E. Pirozzi - 2008 Amarican Institut of Physics, 186–197

[2] D. Daley, D. Vere-Jones, An Introduction to the Theory of Point Processes, Springer, New York (1988).

[3] Eden UT, Frank LM, Barbieri R, Solo V, Brown EN, Dynamic analysis of neural encoding by point process adaptive filtering. Neural Comp 16, 971–998 (2004).

[4] Klement D, Stochastic models in neurophysiology. Thesis. Charles University, Faculty of Math and Physics, Prague(2006).