MODEL PRO NÁHODNÉ SJEDNOCENÍ INTERAGUJÍCÍCH KRUHŮ

Kateřina Helisová*, Jesper Møller**

*Univerzita Karlova v Praze/České vysoké učení technické v Praze, ČR

**Aalborg University, Dánsko

helisova@karlin.mff.cuni.cz

SOUHRN

Poster shrnuje statistické výsledky z [2] týkající se analýzy obrazu keřů vřesu. Ty byly modelovány jako náhodná množina daná konečným sjednocením kruhů se středy v omezené množině $S \subset \mathbb{R}^2$, mezi nimiž se vyskytují vzájemné interakce.

HUSTOTA KONFIGURACE

Označme $b = b(z, r)$ kruh se středem v bodě $z \in \mathbb{R}^2$ a poloměrem $r \in (0, \infty)$. Ztotožníme-li b s bodem $x = (z, r) \in \mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$, pak sjednocení $\cup_{i \in I} b_i = \cup_{i \in I} b(z_i, r_i)$, $I \subseteq \mathbb{N}$, můžeme ztotožnit s bodovým procesem na $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$.

Vztažný proces: Poissonův bodový proces Y (tj. vztažný Booleovský model je náhodná množina daná sjednocením kruhů odpovídajících procesu Y) s mírou intenzity $\rho(z)\,\mathrm{d}z\,Q(\mathrm{d}r)$ na $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$, kde ρ značí funkci intenzity bodového procesu středů a Q je rozdělení poloměrů kruhů.

Model: Sjednocení kruhů odpovídající bodovému procesu $\mathbf{X}$, který je absolutně spojitý vzhledem k Poissonovu procesu Y a je vzhledem k němu daný hustotou $f(\mathbf{x})$ pro konečnou konfiguraci bodů $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Předpoklad: $\mathbf{X}$ je konečný bodový proces definovaný na $S \times (0, R)$, kde $S \subset \mathbb{R}^2$ je omezená množina taková, že $\int_S \rho(z)\,\mathrm{d}z > 0$, a $R < \infty$.

Tvar hustoty: $\boxed{f_\theta(\mathbf{x}) = \frac{1}{c_\theta} \exp\left(\theta_1 A(\mathcal{U}_\mathbf{x}) + \theta_2 L(\mathcal{U}_\mathbf{x}) + \theta_3 N_{\mathrm{cc}}(\mathcal{U}_\mathbf{x}) + \theta_4 N_{\mathrm{h}}(\mathcal{U}_\mathbf{x})\right)}$

$\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ ... vektor parametrů, c_θ ... normovací konstanta,
$A(\mathcal{U}_\mathbf{x})$ ... plocha sjednocení kruhů odpovídajících konfiguraci $\mathbf{x}$,
$L(\mathcal{U}_\mathbf{x})$ ... obvod sjednocení kruhů odpovídajících konfiguraci $\mathbf{x}$,
$N_{\mathrm{cc}}(\mathcal{U}_\mathbf{x})$ ... počet spojitých komponent sjednocení kruhů odpovídajících $\mathbf{x}$,
$N_{\mathrm{h}}(\mathcal{U}_\mathbf{x})$ ... počet děr sjednocení kruhů odpovídajících $\mathbf{x}$.

ODHAD PARAMETRŮ

Mějme pozorování $\mathcal{U}_\mathbf{x}$ a pišme hustotu ve tvaru $f_\theta(\mathbf{x}) = h_\theta(\mathbf{x})/c_\theta$.

Logaritmicko-věrohodnostní funkce: $l(\theta) = \theta_1 A(\mathcal{U}_\mathbf{x}) + \theta_2 L(\mathcal{U}_\mathbf{x}) + \ldots - \log c_\theta$.

Problém: c_θ nemá explicitní vyjádření.

Řešení: Pro pevný vektor θ_0 lze maximalizovat poměr věrohodností
$l(\theta) - l(\theta_0) = \log(h_\theta(\mathbf{x})/h_{\theta_0}(\mathbf{x})) - \log(c_\theta/c_{\theta_0})$, který lze aproximovat pomocí

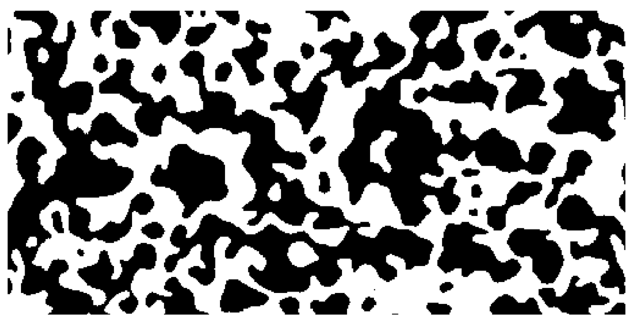
$$l(\theta) - l(\theta_0) = \log(h_\theta(\mathbf{x})/h_{\theta_0}(\mathbf{x})) - \log \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} h_\theta(Z_m)/h_{\theta_0}(Z_m),$$

kde Z_m jsou realizace z hustoty $f_{\theta_0}(\mathbf{x})$ získané pomocí MCMC simulací.

WALDŮV TEST

$H: \theta M = 0$, kde M je $p \times k$-rozměrná matice hodnosti k a p je délka vektoru θ.
Waldova statistika $(\hat{\theta}M)(M^T j(\hat{\theta})^{-1} M)(\hat{\theta}M)^T$ má asymptoticky χ^2_k-rozdělení.
Platí $H': \theta_i = 0 \iff H: \theta M = 0$, kde M je $p \times 1$-rozměrná matice se všemi prvky rovnými nule kromě i-tého, který je roven 1.

DATA



Obrázek 1: Keře vřesu (označené černou bavou) na ploše 10×20m v Jädraås ve Švédsku (data z roku 1981).

Vztažné procesy

- $\rho = 2.45$ a Q má rozdělení $N(0.26, 0.16^2)$ zúžené na interval $[0, 0.50]$ (R1),
- $\rho = 2.45$ a Q má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0, 0.53]$ (R2),
- $\rho = 1.16$ a Q má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0, 0.53]$ (R3).

Odhady parametrů a Waldův test na datech

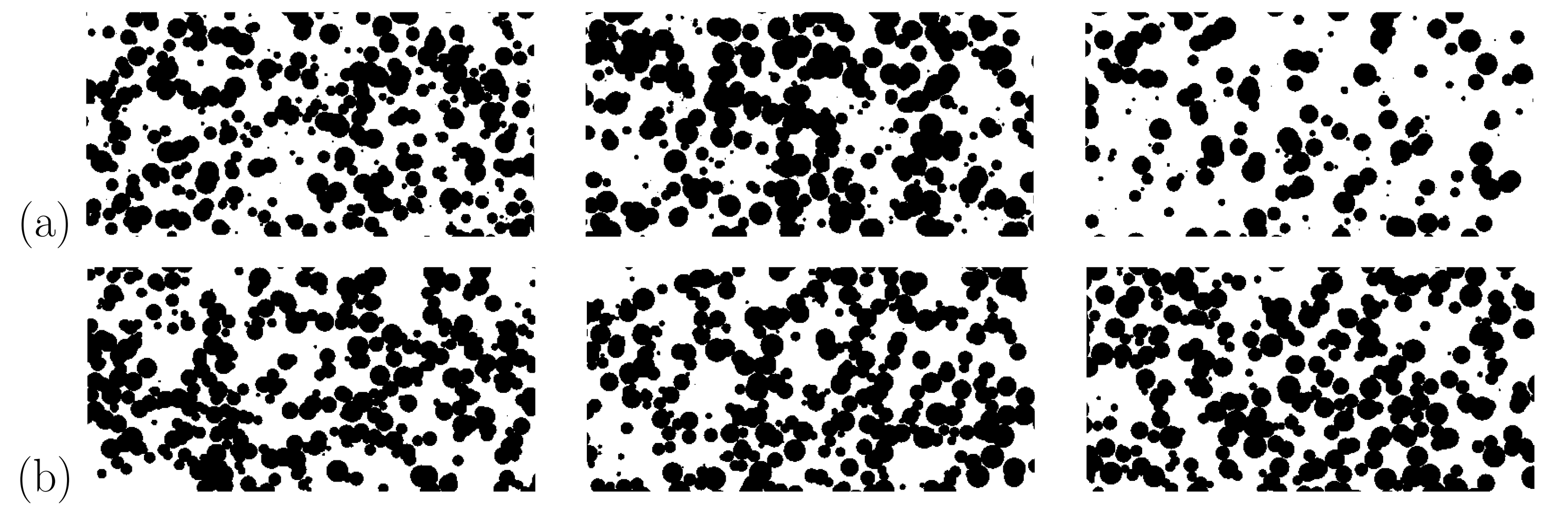
	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
(R1)	−2.14	0.89	−1.78	−1.01
Wald	7.45	17.89	48.96	2.14
(R2)	−4.81	1.17	−2.26	−0.69
Wald	37.04	29.77	83.66	1.01
(R3)	−3.67	1.62	−2.25	−0.13
Wald	17.01	46.67	73.01	0.04

Kritická hodnota $\chi^2_1(0.95) = 3.842 \Rightarrow \theta_4 = 0 \Rightarrow N_{\mathrm{h}}$ z hustoty vypustíme.

	θ_1	θ_2	θ_3
(R1)	−2.33	0.92	−1.77
Wald	9.54	21.01	46.89
(R2)	−4.91	1.18	−2.25
Wald	38.02	32.33	78.78
(R3)	−3.71	1.64	−2.25
Wald	17.04	47.11	73.89

Všechny parametry označeny za nenulové ⇒ konečné hodnoty parametrů v modelu.

SIMULACE



Obrázek 2: Simulace (a) vztažných Booleovských modelů (R1)-(R3) (zleva doprava) a (b) fitovaných (A, L, N_{cc})-interakčních modelů vzhledem ke vztažným procesům (R1)-(R3) (rovněž zleva doprava).

TESTOVÁNÍ VHODNOSTI MODELU

Nechť $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}^2$ je množina pozorovaná v (omezeném) okně $W \subset \mathbb{R}^2$ a G je množina pixelů digitálního záznamu $\mathbf{A}$.

Normovaná sférická kontaktní distribuční funkce

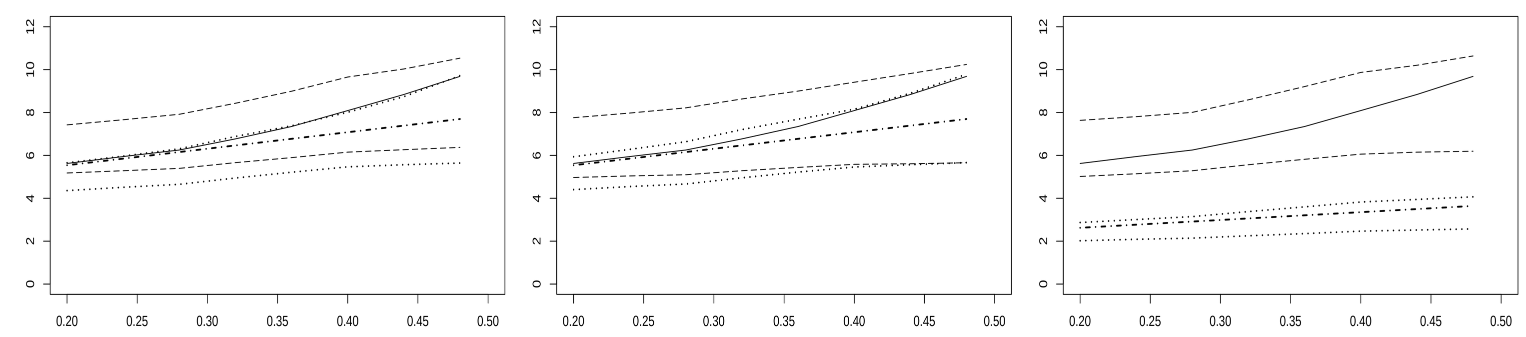
Nechť $D = \inf\{r \geq 0 : \mathbf{A} \cap b(0, r) \neq \emptyset\}$.

Sférická kontaktní distribuční funkce: $H(r) = \mathrm{P}(D \leq r | D > 0)$, $r \geq 0$.

Neparametrický odhad: $\hat{H}(r) = \frac{\sum_{u \in G} \mathbf{1}[u \notin \mathbf{A},\, u + b(0,r) \subset W,\, (u + b(0,r)) \cap \mathbf{A} \neq \emptyset]}{\sum_{u \in G} \mathbf{1}[u \notin \mathbf{A},\, u + b(0,r) \subset W]}$.

Normovaná sférická kontaktní distribuční funkce: $T(r) = -\frac{1}{r} \log(1 - H(r))$.

Pro vztažné Booleovské modely: $T(r) = 2\rho\pi \mathrm{E}Q + \rho\pi r$.



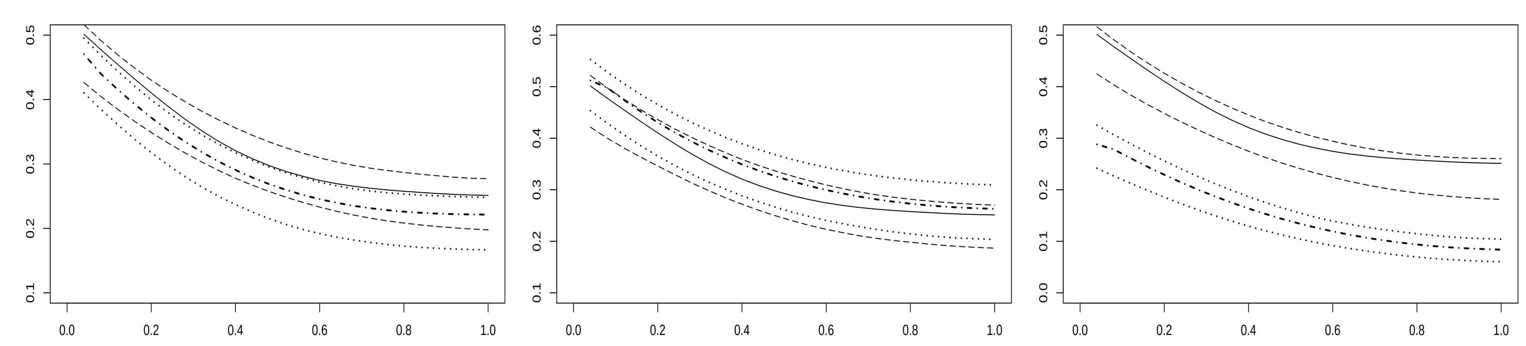
Obrázek 3: Odhad $\hat{T}(r)$ získaný z dat (plná křivka), teoretická $T(r)$ pro Booleovský model (čerchovaná křivka), 2.5 % a 97.5 % obálky získané z 39 simulací Booleovského modelu (tečkovaná křivka) a 2.5 % a 97.5 % obálky získané z 39 simulací fitovaného modelu (čárkovaná křivka) pro vztažné procesy (zleva doprava) (R1)-(R3).

Kovarianční funkce

Kovarianční funkce: $C(r) = \mathrm{P}(u \in \mathbf{A},\, v \in \mathbf{A})$ pro $u, v \in \mathbb{R}^2 : \|u - v\| = r$.

Neparametrický odhad: $\hat{C}(r) = \frac{\sum_{u,v \in G} \mathbf{1}[\|u-v\| = r,\, \{u,v\} \subset \mathbf{A}]}{\sum_{u,v \in G} \mathbf{1}[\|u-v\| = r]}$.

Booleovské modely: $C(r) = 2p - 1 + (1-p)^2 \exp\left(\rho \mathrm{E}\left[2Q^2 \arccos \frac{Q}{2r} - \frac{r}{2}\sqrt{4Q^2 - r^2}\right]\right)$.

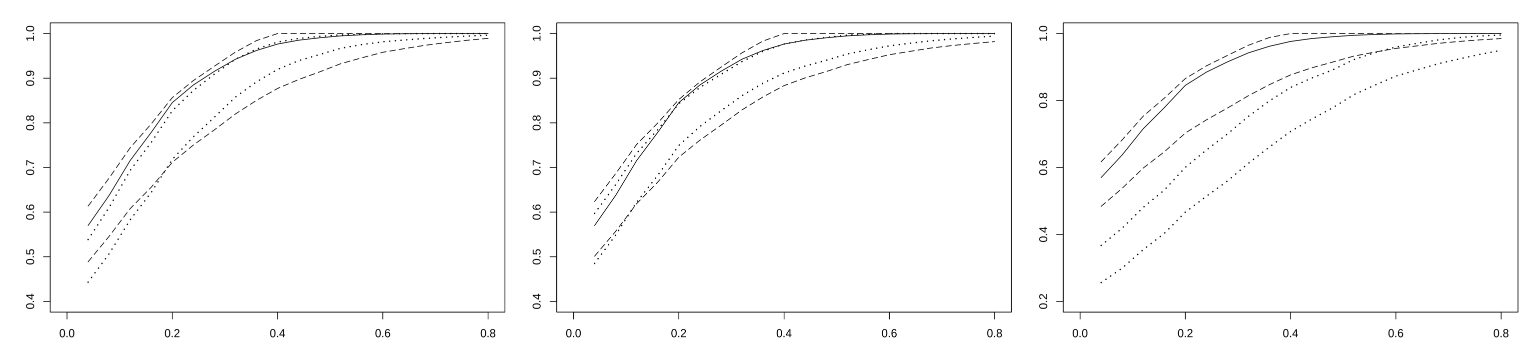


Obrázek 4: Odhad $\hat{C}(r)$ získaný z dat (plná křivka), teoretická $C(r)$ pro Booleovský model (čerchovaná křivka), 2.5 % a 97.5 % obálky získané z 39 simulací Booleovského modelu (tečkovaná křivka) a 2.5 % a 97.5 % obálky získané z 39 simulací fitovaného modelu (čárkovaná křivka) pro vztažné procesy (zleva doprava) (R1)-(R3).

Dilatace množiny

Nechť $\mathbf{A}_{\oplus r} = \cup_{u \in \mathbf{A}} b(u, r)$ je zvětšení a $\mathbf{A}_{\ominus r} = \{u : b(u, r) \subseteq \mathbf{A}\}$ zmenšení množiny $\mathbf{A}$ o hodnotu r.

Dilatace: $d(r) = \frac{|\mathbf{A}_{\oplus r} \cap W_{\ominus r}|}{|W_{\ominus r}|}$.



Obrázek 5: Dilatace dat (plná křivka), 2.5 % a 97.5 % obálky získané z 39 simulací Booleovského modelu (tečkovaná křivka) a 2.5 % a 97.5 % obálky z 39 simulací fitovaného modelu (čárkovaná křivka) pro vztažné procesy (zleva doprava) (R1)-(R3).

Poděkování: Výzkum byl podporován granty GAČR 201/06/0302 a GAČR 201/05/H007 a grantem 272-06-0442 "Point process modelling and statistical inference" (Danish Natural Science Research Council).

Literatura

[1] Møller, J., Helisová, K. (2008). Power diagrams and interaction processes for unions of discs. *Advances in Applied Probability*, **40(2)**, 321–347.

[2] Møller, J., Helisová, K. (2008). Likelihood inference for unions of interacting discs. *Připravuje se.*

[3] Møller, J., Waagepetersen, R. P. (2003). *Statistical Inference and Simulation for Spatial Point Processes.* Chapman and Hall/CRC, Boca Raton.