ODHADY VARIANČNÝCH PARAMETROV V LRM S KONEČNÝM DISKRÉTNYM SPEKTROM

MARTINA HANČOVÁ

martina.hancova@upjs.sk

Ústav matematických vied, Univerzita P. J. Šafárika, Košice, SR

Pri empirickej predikcii časových radov pomocou regresných modelov si prax žiada odhad variančných parametrov daného regresného modelu. Poster predstavuje dve varianty metódy prirodzeného odhadu — jeden založený na metóde najmenších štvorcov (OLSE) a druhý na najlepšej lineárnej nevychýlenej predikcii (BLUP) — pre odhadovanie variančných parametrov vo všeobecnej triede lineárnych regresných modelov (LRM) časových radov, nazývaných LRM s konečným diskrétnym spektrom (FDSLRM), kde stredné hodnoty sú modelované lineárnou regresiou a chybové členy konečným diskrétnym spektrom a bielym šumom.

REGRESNÝ MODEL FDSLRM

Model časového radu $X(.)$ so širokými aplikáciami (Štulajter, 2003), tzv. **lineárny regresný model s konečným diskrétnym spektrom (FDSLRM)**, spĺňa rovnicu

$$X(t) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i f_i(t) + \sum_{j=1}^{l} Y_j v_j(t) + w(t); t = 1, 2, ...,$$

kde k a l sú pevne dané nezáporné celé čísla,
$\beta \equiv (\beta_1, ..., \beta_k)' \in \mathrm{E}^k$ je vektor regresných parametrov,
$Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_l)'$ je náhodný vektor so strednou hodnotou $E\{Y\} = 0$ a kovariančnou maticou $Cov\{Y\} \equiv \mathrm{D} = diag(\sigma_j^2) > 0$,
$f_i(.)$ a $v_j(.)$ sú dané reálne funkcie definované na E^1,
$w(.)$ je biely šum nekorelovaný s Y a s disperziou $D\{w(t)\} = \sigma^2 > 0$,
$\nu \equiv (\sigma^2, \sigma_1^2, ..., \sigma_l^2)' \in (0, \infty)^{l+1}$ je vektor variančných parametrov.

Konečné pozorovanie FDSLRM

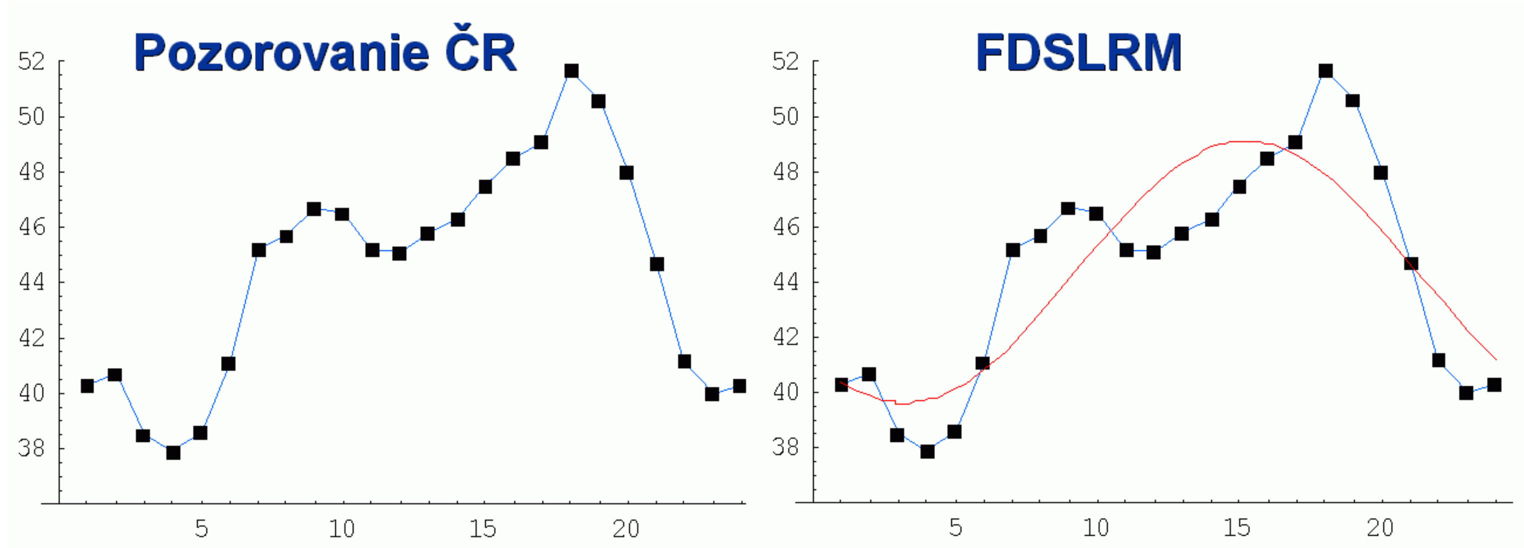
Pozorovanie $X = (X(1), \ldots, X(n))'$ vo FDSLRM modeli ČR patrí do triedy lineárnych zmiešaných modelov:

$$X = \mathrm{F}\beta + \mathrm{V}Y + w, E(w) = 0, Cov\{w\} = \sigma^2 \mathrm{I}_n, Cov\{Y, w\} = 0,$$

kde V a F sú známe matice dané funkciami $f_i(.)$ a $v_j(.)$, náhodný vektor $w = (w(1), ..., w(n))'$ je pozorovaním bieleho šumu $w(.)$.

Ilustračný príklad FDSLRM z praxe

Spotreba elektrickej energie každú hodinu počas typického dňa v jednom z obchodných domov v SR (obr. vľavo) je možné popísať FDSLRM modelom (obr. vpravo: červená krivka predstavuje jeho strednú hodnotu), ktorý je detailne popísaný v Štulajter & Witkovský (2004).



Predikcia hodnôt ČR pomocou BLUP

Pri predikcii budúcich hodnôt $X(n+d)$ pomocou najlepšej lineárnej nevychýlenej predikcie (BLUP) tvar predikcie vo všeobecnosti **závisí od vektora variančných parametrov ν**. Na základe Hendersonových rovníc a teórie Schurovho doplnku bol odvodený explicitný maticový tvar pre BLUP $X_\nu^*(n+d)$ a jeho MSE (viď podrobnejšie Hančová, 2007):

$$X_\nu^*(n+d) = \begin{pmatrix} f \\ v \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \mathrm{F}'\mathrm{F} & \mathrm{V}'\mathrm{F} \\ \mathrm{F}'\mathrm{V} & \mathrm{V}'\mathrm{V} + \sigma^2 \mathrm{D}^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{F}'X \\ \mathrm{V}'X \end{pmatrix}$$

METÓDY ODHADU VEKTORA ν

V praktických aplikáciách modelovania ČR nepoznáme vektor variančných parametrov $\nu \equiv (\sigma^2, \sigma_1^2, ..., \sigma_l^2)' \in (0, \infty)^{l+1}$, preto musíme riešiť problém ich odhadu. Tradičné metódy odhadu ako metóda maximálnej vierohodnosti (MLE, resp. REMLE) alebo dvojitá metóda najmenších štvorcov (DOOLSE) vo všeobecnosti môžu viesť k záporným odhadom, resp. je obtiažne teoreticky študovať ich vlastnosti. Problém bol vyriešený pomocou prirodzených odhadov.

Základná idea prirodzeného odhadu

Ak by sme poznali náhodný vektor $Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_l)'$, tak na základe vzťahu $\sigma_j^2 = Cov\{Y_j\} = E\{Y_j^2\}; j = 1, 2, \ldots, l$ prirodzenými odhadcami σ_j^2 by boli Y_j^2. Cieľom bolo preto „odhadnúť“ zložky Y_j.

(1) V praxi často poznáme práve 1 realizáciu ČR, t.j. je vhodné uvažovať pozorovanie X za podmienky realizácie $Y = y$, čo dáva klasický LRM $X = \mathrm{F}\beta + \mathrm{V}y + w$; $Cov\{w\} = \sigma^2 \mathrm{I}_n$ s využitím OLSE $(\hat{\beta}, \hat{y})'$ pre $(\beta, y)'$. **Prirodzenými odhadcami (NE) nazveme potom $\breve{\sigma}_j^2(X) \equiv \hat{y}_j^2$.**

(2) Druhou možnosťou je priama predikcia Y. V tomto prípade sa núka využiť BLUP pre Y, t.j. definovať **prirodzených BLUP odhadcov (BLUP-NE) pre σ_j^2 ako $\overset{*}{\sigma}{}_j^2(X) = [Y_\nu^*]_j^2$; Y_ν^* je BLUP pre Y** založený na pozorovaní $X = (X(1), X(2), \ldots, X(n))'$. Pre σ^2 v oboch prípadoch berieme štandardný odhad rovný súčtu štvorcov rezíduí metódy najmenších štvorcov delený počtom stupňov voľnosti $n - k - l$.

Teoretické vlastnosti odhadcov

Využitím geometrického jazyka Hilbertových priestorov, teórie šikmých projektorov a Schurovho doplnku možno elegantne odvodiť základné teoretické vlastnosti prirodzených NE odhadcov (Hančová, 2008). Navyše možno vytvoriť aj vhodnú modifikáciu týchto odhadcov (MNE). Ukázalo sa, že analogický postup možno aplikovať aj na prirodzené BLUP odhady.

Numerické výsledky v ilustračnom príklade

V našom príklade elektrickej spotreby dostávame:

Odhady NE: $\breve{\sigma}^2 = 1.09, \breve{\sigma}_1^2 = 2.97, \breve{\sigma}_2^2 = 1.76, \breve{\sigma}_3^2 = 0.37, \breve{\sigma}_4^2 = 1.86$

Odhady MNE =MDOOLSE (=REMLE):
$\breve{\sigma}^2 = 1.09, \quad \breve{\sigma}_1^2 = 2.87, \quad \breve{\sigma}_2^2 = 1.67, \quad \breve{\sigma}_3^2 = 0.28, \quad \breve{\sigma}_4^2 = 1.77$

Odhady DOOLSE (=MLE):
$\tilde{\sigma}^2 = 0.93, \quad \tilde{\sigma}_1^2 = 2.89, \quad \tilde{\sigma}_2^2 = 1.68, \quad \tilde{\sigma}_3^2 = 0.29, \quad \tilde{\sigma}_4^2 = 1.79$

Odhady BLUP–NE (po 15 iteráciách $\delta < 2 \cdot 10^{-9}$):
$\overset{*}{\sigma}{}^2 = 1.09, \quad \overset{*}{\sigma}{}_1^2 = 2.81, \quad \overset{*}{\sigma}{}_2^2 = 1.61, \quad \overset{*}{\sigma}{}_3^2 = 0.23, \quad \overset{*}{\sigma}{}_4^2 = 1.71$

(v prípade BLUP-NE sme použili pre výpočet Y_ν^* iteračný algoritmus podľa Searle et al, 1992). Uvedené hodnoty možno použiť v predikcii.

Poďakovanie. Výskum uvedený na tomto posteri je finančne podporený z grantov VEGA 1/3001/06 a VVGS 25/07-08.

Literatúra

[1] Štulajter, F. (2003), „The MSE of the BLUP in a finite discrete spectrum LRM“, *Tatra Mountains Mathematical Publications* **26**, pp. 125–131.

[2] Štulajter, F. and Witkovský, V. (2004), „Estimation of variances in orthogonal finite discrete spectrum linear regression models“, *Metrika* **60**, pp. 105–118.

[3] Hančová, M. (2008), „Natural estimation of variances in a general finite discrete spectrum linear regression model“, *Metrika* **67**, pp. 265–276.

[4] Hančová, M. (2007), *Predictions of time series in finite discrete spectrum linear regression models*, dizertačná práca, UK, Bratislava.

[5] Searle, S.R., Cassella, G. and McCulloch, C. E. (1992), *Variance Components*, Wiley–Interscience, New York.