

**MATEMATICKÉ
PROBLÉMY
NEMATEMATIKŮ**

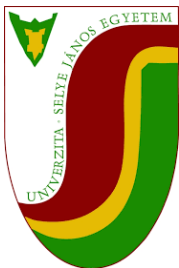


MATEMATIKA A DOKUMENTÁCIA PAMIATOK

Štefan GUBO

Univerzita J. Selyeho, Fakulta ekonómie a informatiky

Komárno, Slovensko



Praha, MFF UK

7. mája 2025



Dokumentácia pamiatok

Jedna zo základných úloh ochrany kultúrneho dedičstva:

Z hľadiska ochrany kultúrneho a prírodného dedičstva je dôležité, aby objekty rôznej veľkosti (*umelecké diela, budovy, jaskyne, archeologické náleziská* atď.) boli s dostatočnou presnosťou **zmerané a zdokumentované**.

Zničené pamiatky

Stojace sochy Budhov, Bamyán, Afganistan (2001)



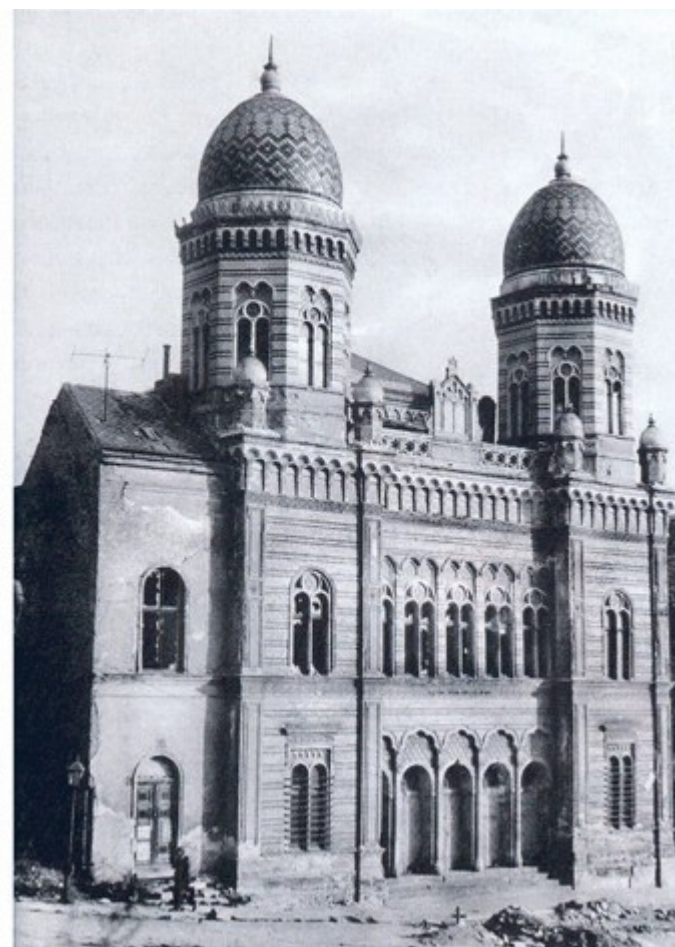
Zničené pamiatky

Stojace sochy Budhov, Bamyán, Afganistan (2001)



Zničené pamiatky

Neologická synagóga, Bratislava, Československo (1969)



Sedem divov starovekého sveta





Dokumentácia pamiatok

Jedna zo základných úloh ochrany kultúrneho dedičstva:

Z hľadiska ochrany kultúrneho a prírodného dedičstva je dôležité, aby objekty rôznej veľkosti (*umelecké diela, budovy, jaskyne, archeologické náleziská* atď.) boli s dostatočnou presnosťou **zmerané a zdokumentované**.

Pre tento účel sa v súčasnosti využívajú **3D optické meracie systémy**, ktoré umožňujú efektívne transformovať reálny objekt do podoby virtuálneho modelu v počítači.

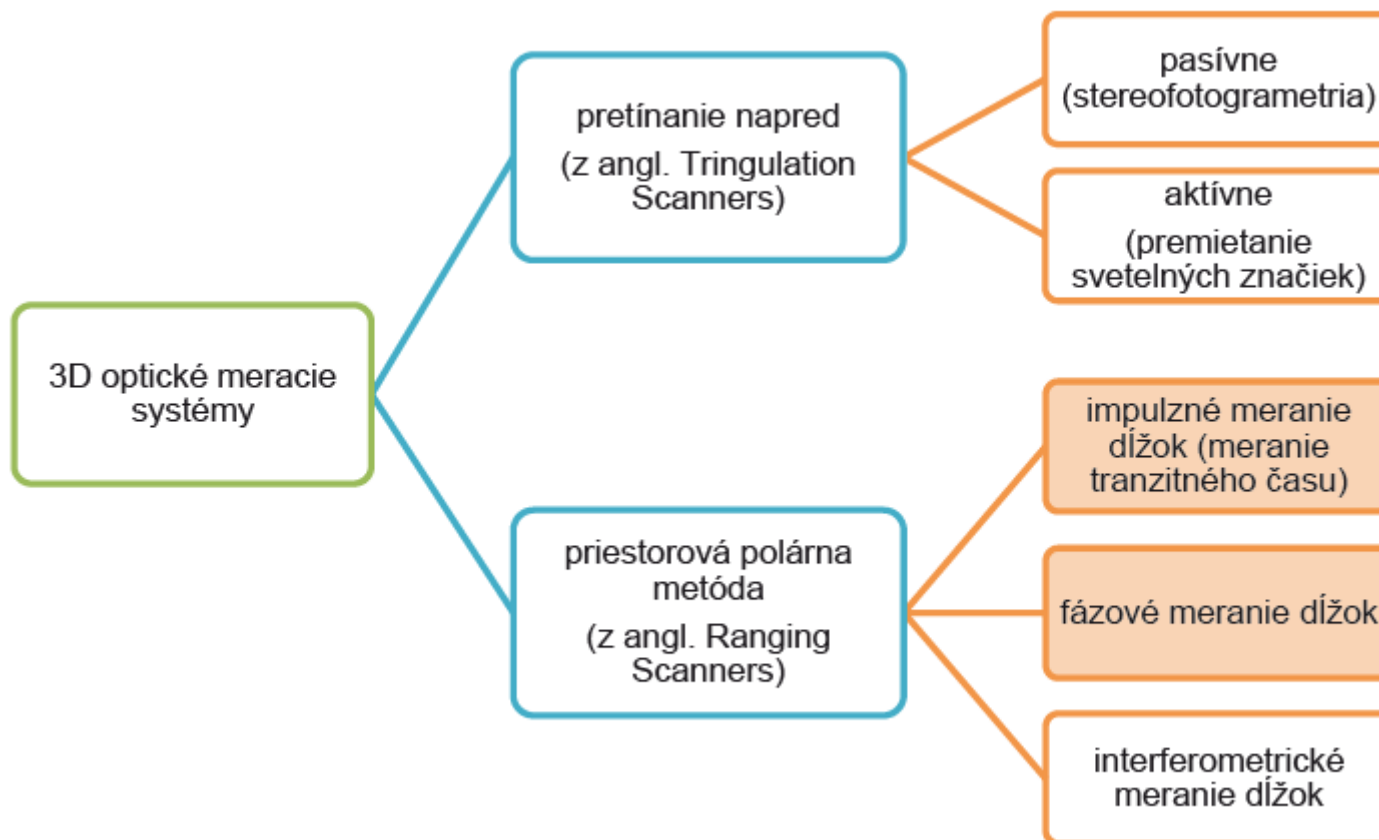


Dokumentácia pamiatok

Pre koho iného by mohli byť výsledky merania dôležité?

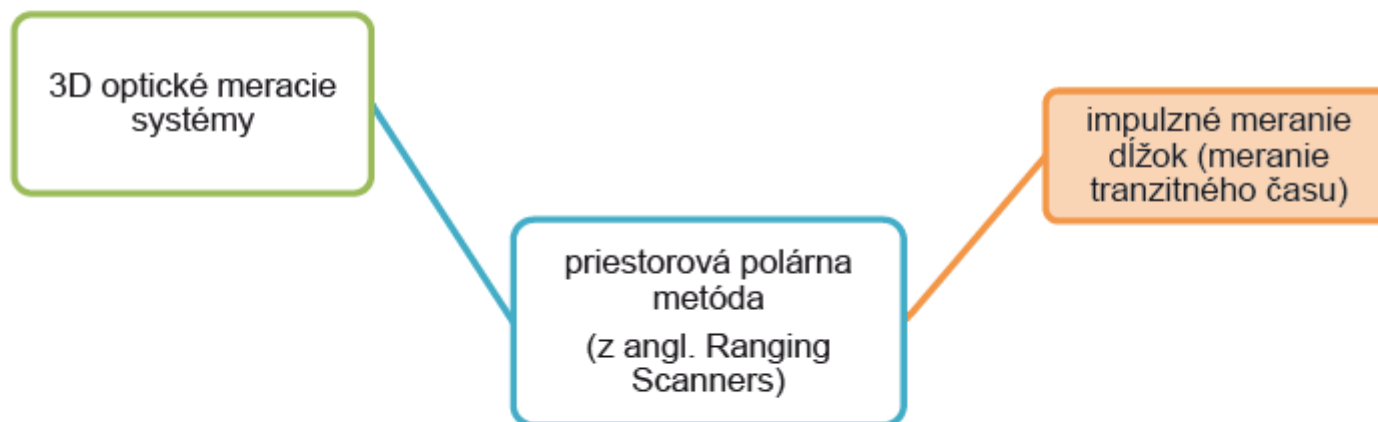
- pre výskumných pracovníkov, doktorandov a študentov (napr. v rámci predmetu počítačová grafika a počítačové videnie)
- pre architektov a odborníkov dejín umenia
- pre účely dokumentácie aktuálneho stavu objektov, na kontrolu presnosti výstavby a monitorovanie stavu objektov
- pre reverzných inžinierov pri tvorbe výkresovej dokumentácie pre objekty, ktoré nemajú pôvodnú dokumentáciu
- v oblasti virtuálnej reality a rozšírenej reality na vytváranie realistických virtuálnych prostredí
- pre virtuálne múzeá

Dokumentácia pamiatok



klasifikácia 3D optických meracích systémov
podľa princípu určenia priestorovej polohy meraných bodov

Dokumentácia pamiatok



TLS so stredným a dlhým dosahom (od 150 m do niekoľko km) pracujú na princípe *priestorovej polárnej metódy* a vyžívajú *impulzné meranie dĺžok*

Terestrické laserové skenery



Terestrický laserový skener



RIEGL VZ-400 TLS

- laser triedy Class I (je bezpečný pre oko),
- rozsah merania: 1,5 m – 600 m
- 120.000 meraných bodov / sec
- presnosť: 5 mm @ 100 m
- je schopný 360° horizontálneho skenovania
- vertikálna výchylka lasera dosahuje 100°
- vertikálne uhlové rozlíšenie: 0,04°
horizontálne uhlové rozlíšenie: 0,01°
- získané dáta sú uložené priamo v prístroji
- skener sa ovláda pomocou displeja alebo vlastného počítača

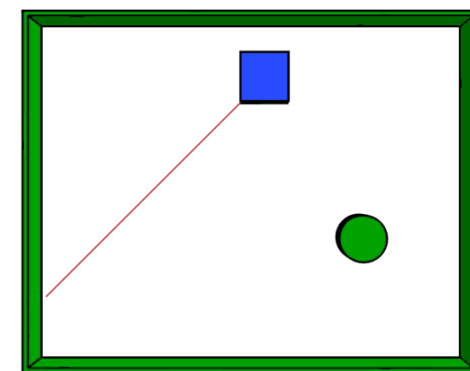
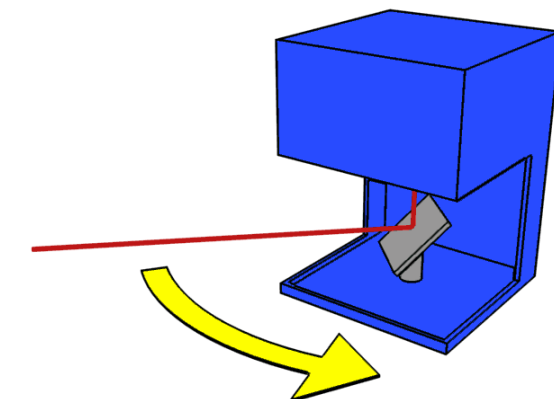


Laserové skenovanie

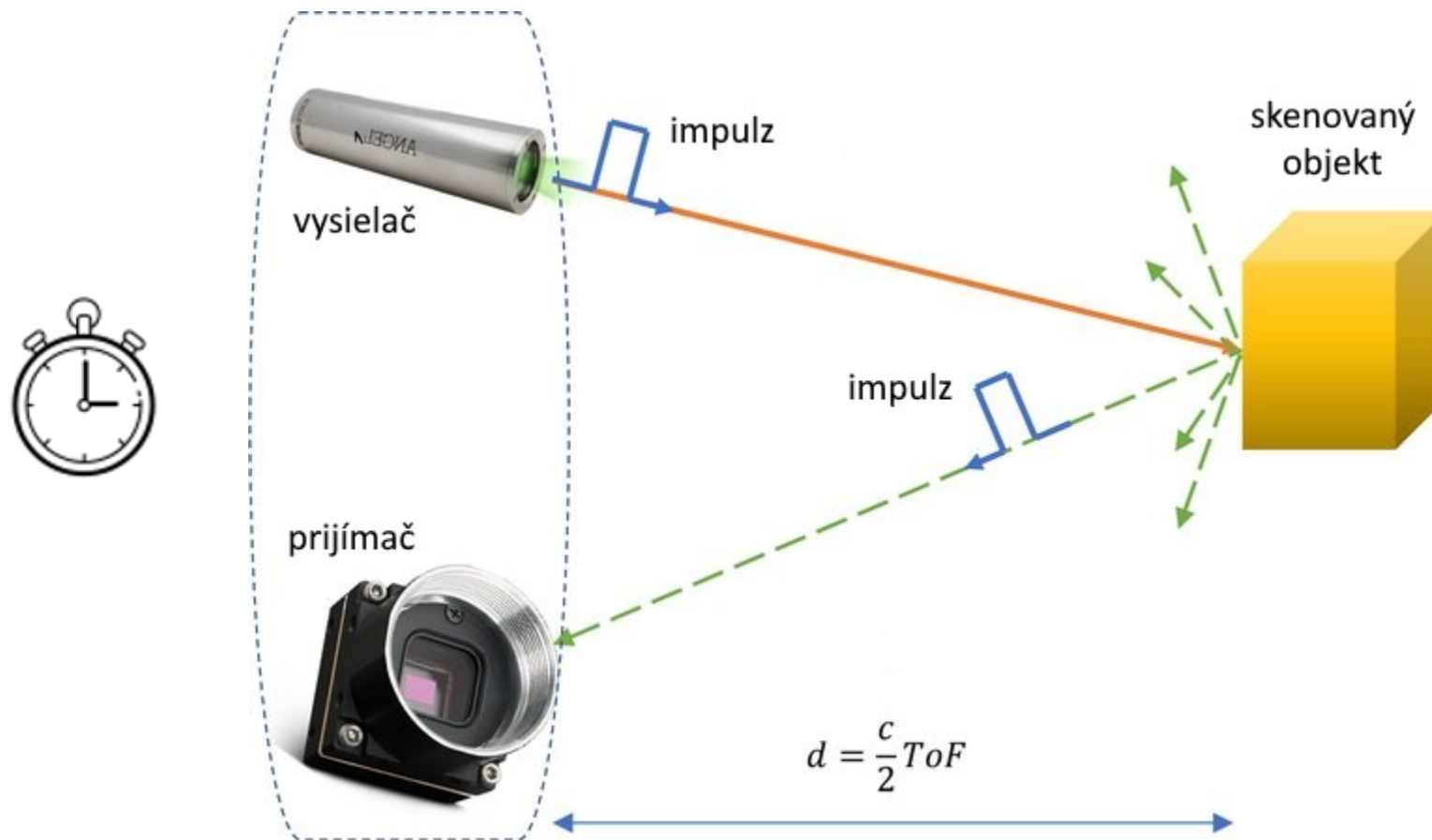
LiDAR (**L**ight **D**etection **a**nd **R**anging, *Svetelná detekcia a meranie vzdialenosti*) je aktívna diaľková meracia technika, ktorá využíva laserové impulzy na zisťovanie vzdialenosti k jednotlivým objektom.

Vysielač TLS vyšle impulz, ktorý zároveň spustí meranie tranzitného času. Po odraze od skenovaného objektu **prijímač** zachytí merací impulz a zastaví meranie tranzitného času.

Podľa doby, za ktorú sa impulz vráti nazad a uhlu odrazu TLS vypočíta priestorovú polohu bodu v danom súradnicovom systéme.

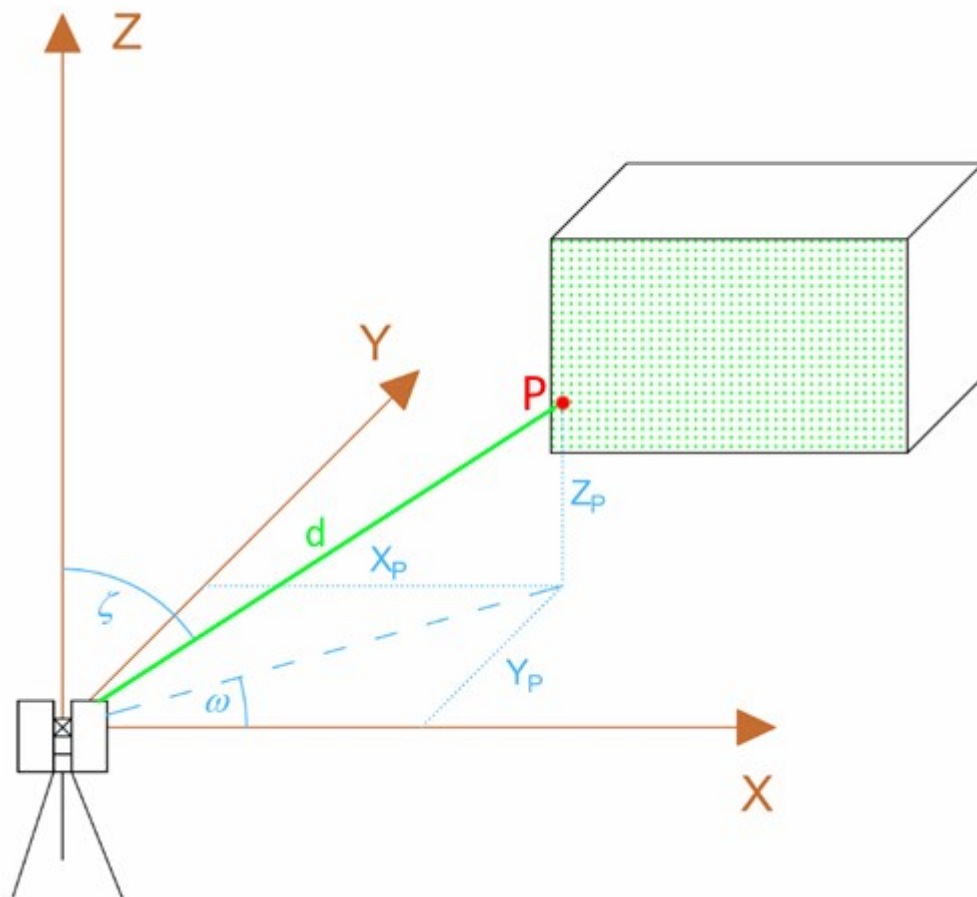


Impulzné meranie dĺžok



Je založené na meraní tranzitného času ToF , potrebného na prechod laserového impulzu z vysielača do prijímača (na prechod dvojnásobku meranej vzdialenosti).

Určenie polohy bodu polárnou metódou



Poloha meraného bodu **P** (ležiaci na povrchu meraného objektu) sa určuje podľa rovníc:

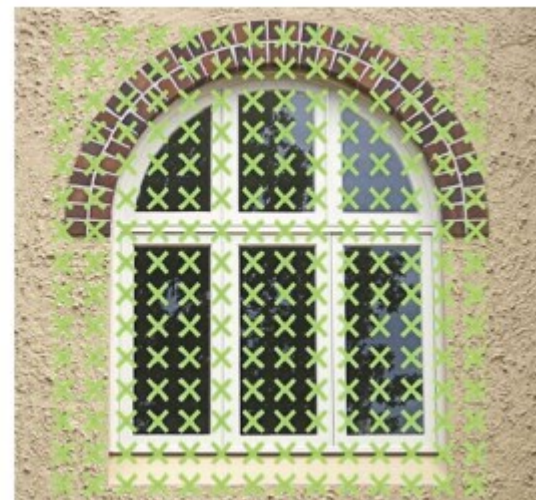
$$\begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \cdot \cos \omega \cdot \sin \zeta \\ d \cdot \sin \omega \cdot \sin \zeta \\ d \cdot \cos \zeta \end{bmatrix}$$

Laserové skenovanie

Skenovanie je teda proces určovania priestorových súradníc bodov, ležiacich na povrchu meraného objektu.



selektívna metóda merania



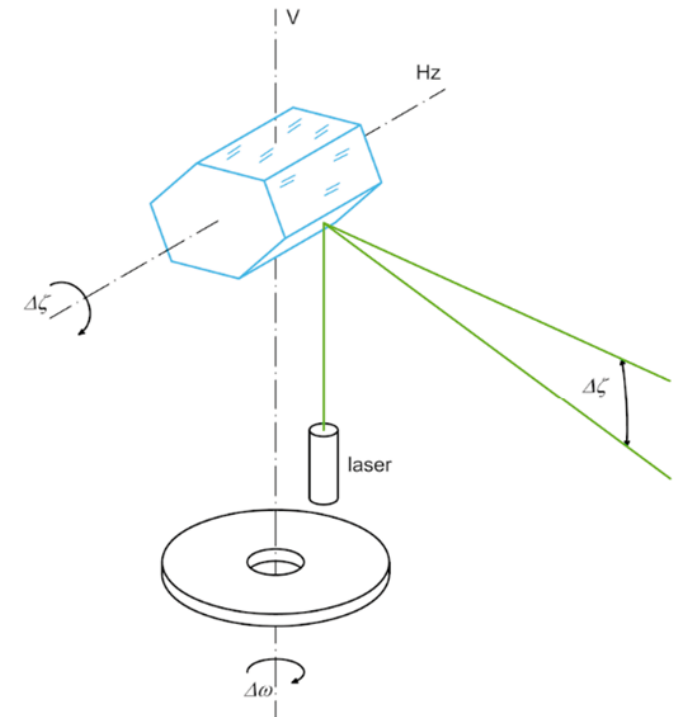
neselektívna metóda merania

Mračno bodov – množina bodov, ktoré sú rozložené v rastrí s pravidelnými uhlovými rozstupmi vo vodorovnom aj zvislom smere.

Laserové skenovanie

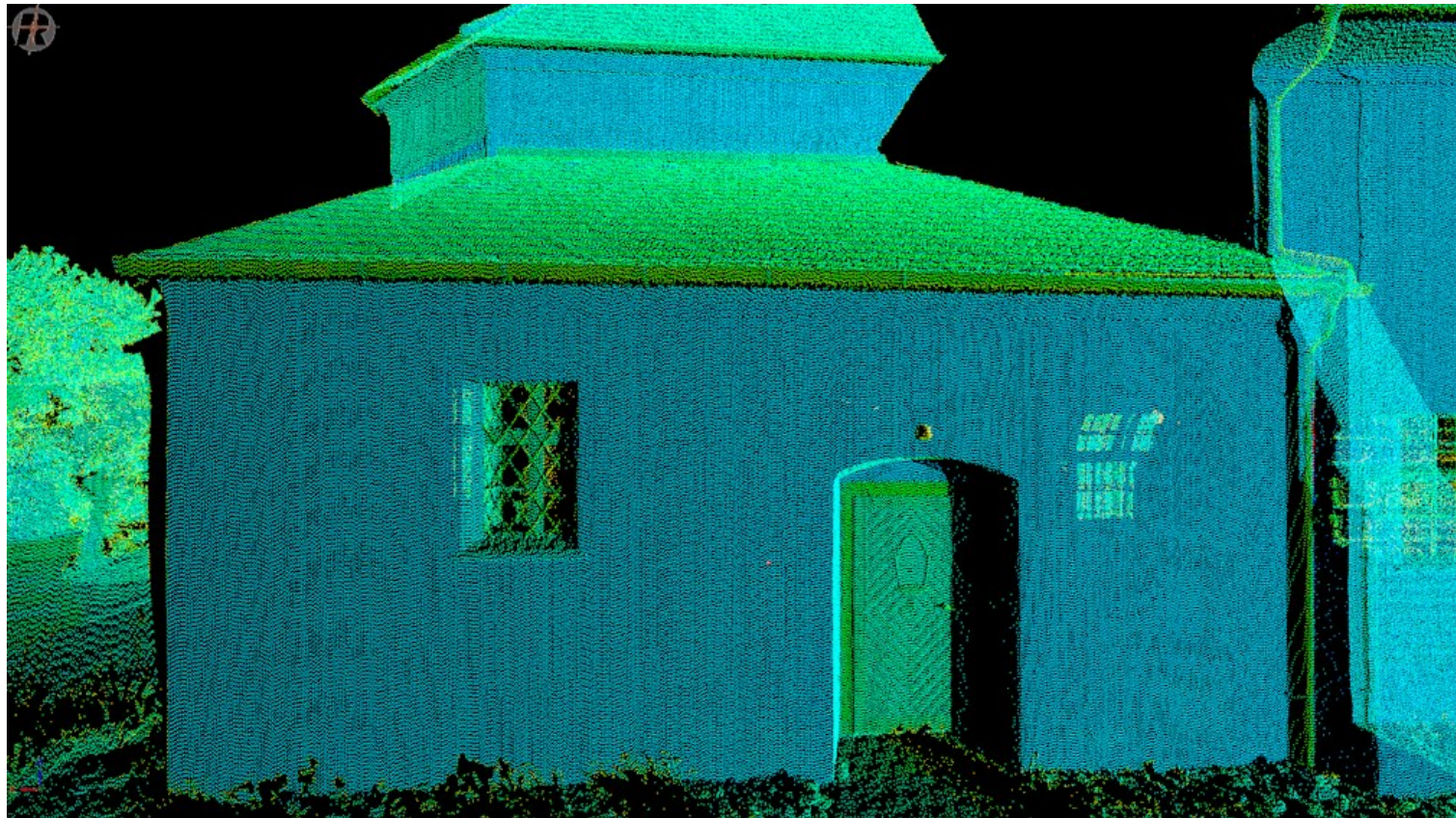
Na určenie súradníc bodov rastra sa používajú rôzne princípy vychyľovania zväzku laserových lúčov.

RIEGL VZ-400: zväzok laserových lúčov je vychyľovaný vo vertikálnom smere pomocou rotujúceho polygonálneho zrkadla, kým vychyľovanie v horizontálnom smere je zabezpečené rotáciou skenera okolo vertikálnej osi.



Laserové skenovanie

Mračno bodov – množina bodov, ktoré sú rozložené v rastrí s pravidelnými uhlovými rozstupmi vo vodorovnom aj zvislom smere.





Laserové skenovanie

Výhody:

- bezkontaktné meranie,
- vysoká efektivita merania (až 1 miliónov bodov za sekundu),
- vysoká presnosť merania (do niekoľko mm),
- tvorba komplexných modelov vo forme mračna bodov,
- na modeloch je možné vykonávať merania dĺžok, obsahov a objemov,
- určovanie deformácií objektov, presnosti výstavby,
- je možné modely georeferencovať do príslušného súradnicového systému.



Laserové skenovanie

Nevýhody

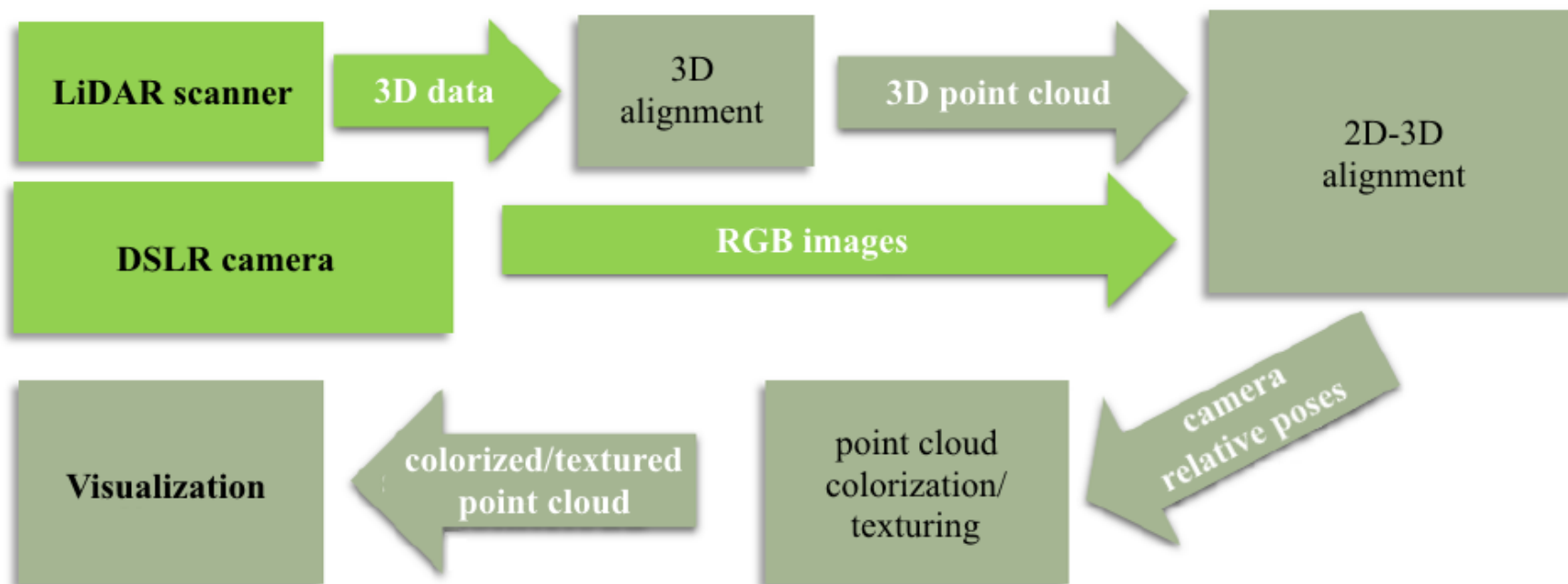
- vysoká cena TLS,
- niektoré časti objektu sú pre TLS „*neviditeľné*“,
- väčšina TLS neposkytuje dostatočne presnú farebnú informáciu, aby modely vyhovovali požiadavkám ochrany kultúrneho dedičstva.

Možné riešenie: fúzia 2D fotozáberov bohatých na detaily vo vysokom rozlíšení s 3D údajmi získanými pomocou skenera.

V prednáške uvedieme postup na tvorbu farebného a metrického modelu väčšieho objektu a popisujeme metodiku zberu a spracovania 3D a 2D dát.

Postup získavania dát a tvorby 3D modelu

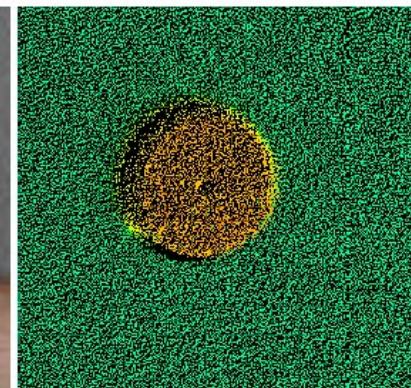
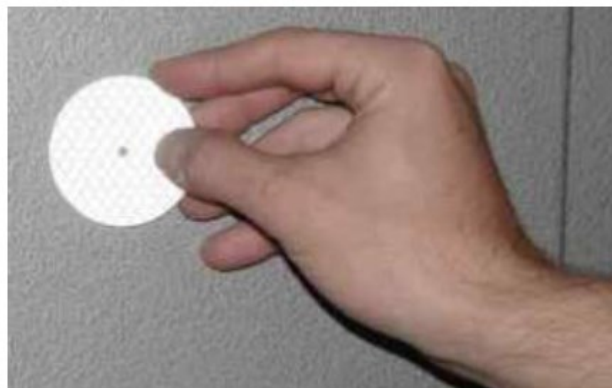
- 1) **Zber dát** (3D skenovanie a 2D fotografovanie)
- 2) **Fúzia a úprava 3D dát**
- 3) **Fúzia 3D-2D dát**
- 4) **Zafarbenie mračna bodov**



0) Príprava na skenovanie

- získanie povolenia na terénnu prácu
- prehliadka terénu, voľba stanovísk pre skenovanie
- voľba / umiestnenie referenčných bodov
 - signalizované prirodzene priamo na meranom objekte (napr. ostré rohy)
 - umelo signalizované pomocou signalizačných značiek, skener RIEGL používa rovinné cieľové značky s reflexným povrchom, ktoré majú kruhový tvar s priemerom 5 cm

**Musia byť stabilizované
spôsobom, ktorý zabezpečí
ich stabilitu počas
celej doby merania!**



0) Príprava na skenovanie



0) Príprava na skenovanie

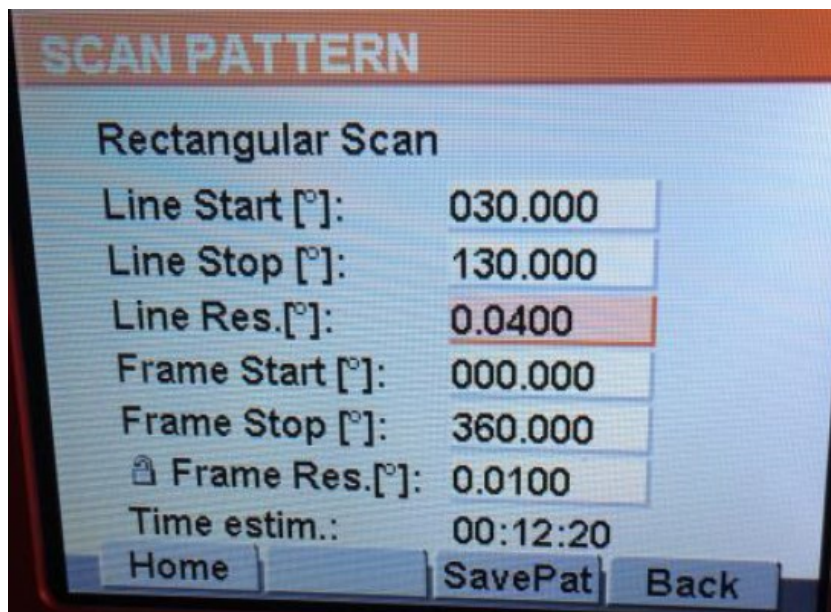
- určenie súradníc vybraných referenčných bodov vo vopred definovanom súradnicovom systéme pomocou konvenčných geodetických metód



1) Zber dát: 3D skenovanie

1) definovanie parametrov skenovania

- nastavenie počiatočného a koncového vodorovného smeru
- nastavenie zvislého uhla
- nastavenie hustoty skenovania definovaním kroku horizontálneho a zvislého uhla $\Delta\omega$ a $\Delta\zeta$



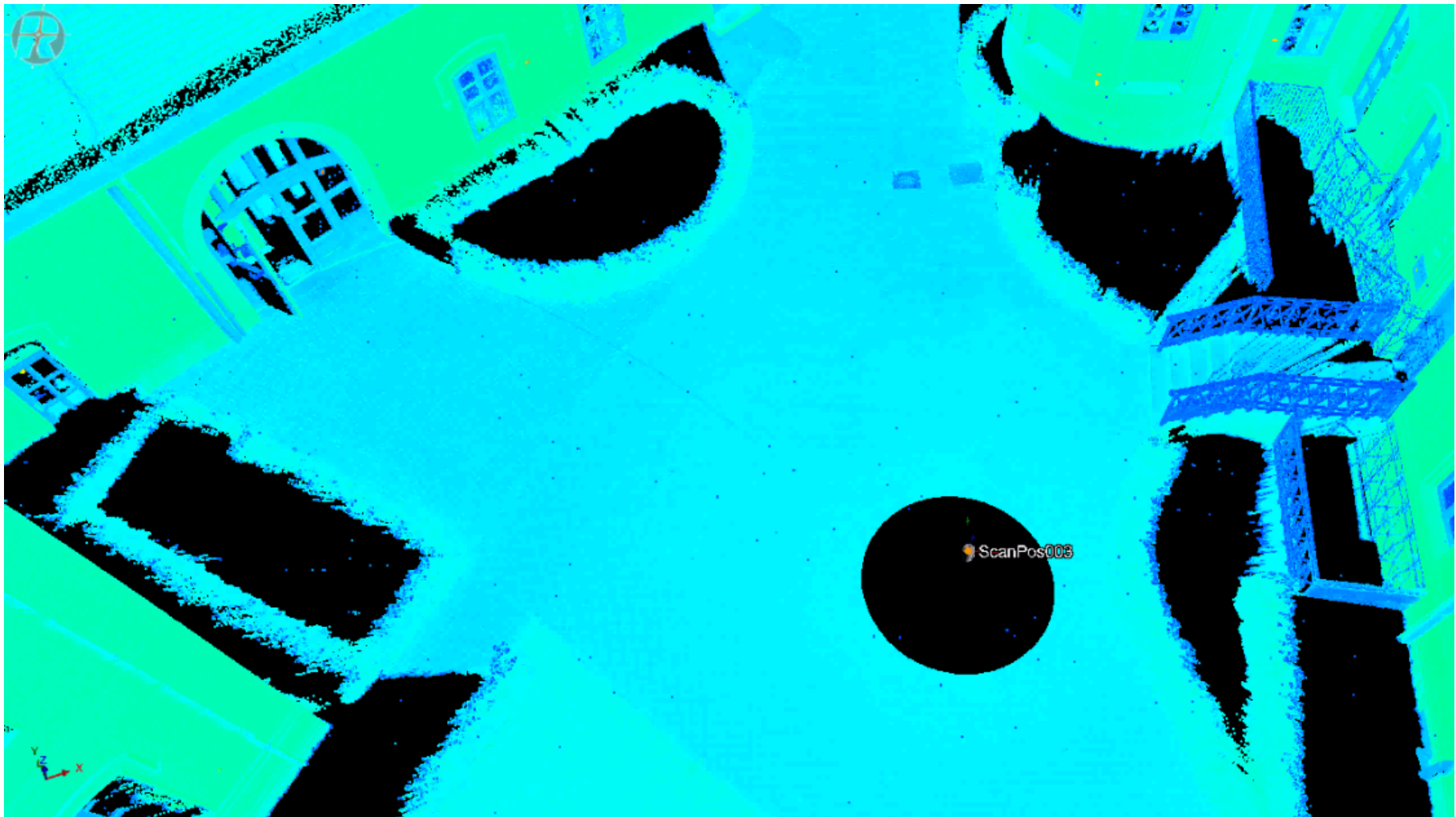


1) Zber dát: 3D skenovanie

2) pustenie procesu merania

- po spustení merania skenovanie prebieha automatizovane bez nutnosti zasahovania merača do tohto procesu
- skener určuje priestorové súradnice bodov a uloží ich do internej pamäti prístroja
- okrem súradníc bodov sa v procese merania získava aj informácia o intenzite odrazeného meracieho signálu

1) Zber dát: 3D skenovanie



Vykreslenie mračna bodov zafarbených podľa intenzity odrazených lúčov



1) Zber dát: 3D skenovanie

2) pustenie procesu merania

- po spustení merania skenovanie prebieha automatizovane bez nutnosti zasahovania merača do tohto procesu
- skener určuje priestorové súradnice bodov a uloží ich do internej pamäti prístroja
- okrem súradníc bodov sa v procese merania získava aj informácia o intenzite odrazeného meracieho signálu
- osobitný proces merania je určovanie polohy referenčných bodov (tzv. *reflektorov* alebo *markerov*)
- získanie obrazových informácií z internej digitálnej kamery skenera alebo pripojenej externej digitálnej kamery

1) Zber dát: 3D skenovanie



Vykreslenie mračna bodov zafarbených podľa RGB informácií

1) Zber dát: 2D fotografovanie



1) Zber dát: 2D fotografovanie



Nikon D810

- 36,3 MPx full frame CMOS senzor
- 14 bitový procesor
- citlivosť ISO 32-51200



AF Nikkor 20mm f2.8D

AF Nikkor 35mm f2D

AF Nikkor 85mm f1.8D

Vnútoraná kalibrácia kamery a jednotlivých objektívov sa uskutočnila priamo v centrále spoločnosti RIEGL v meste Horn.

1) Zber dát: 2D fotografovanie

Canon



Canon EOS 5D Mark III

- 22,3 MPx full frame CMOS senzor
- 14 bitový procesor
- citlivosť ISO 100-25600

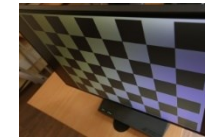
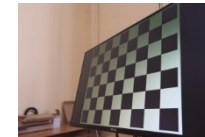
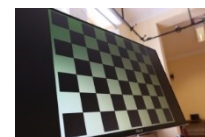
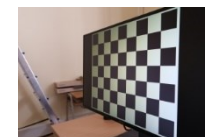


Canon EF 16-35 mm

Canon EF 24-105 mm

Canon EF 70-200 mm

Vnútna kalibrácia kamery a jednotlivých objektívov bola uskutočnená pri premenlivom nastavení funkcie zoom za použitia kalibračného toolboxu pre MATLAB.



Reformovaný kostol v Šamoríne

Kostol bol postavený v XIII. storočí v neskororománskom slohu a je jedným z najstarších a najkrajších kostolov na Žitnom ostrove.



Reformovaný kostol v Šamoríne

Hlavná loď a svätyňa kostola boli úplne vymaľované na základe logicky postaveného teologického programu. Vo svätyni sa pred nami odкрývajú najdôležitejšie udalosti zo života Panny Márie.



Reformovaný kostol v Šamoríne

Klenba svätyne. Zvestovanie Panne Márii, Navštívenie Panny Márie, Obetovanie Ježiša v chráme, Smrť Panny Márie a Korunovanie Panny Márie za kráľovnú neba.



1) Zber dát: **zber 3D a 2D dát**



1) Zber dát: **zber 3D a 2D dát**

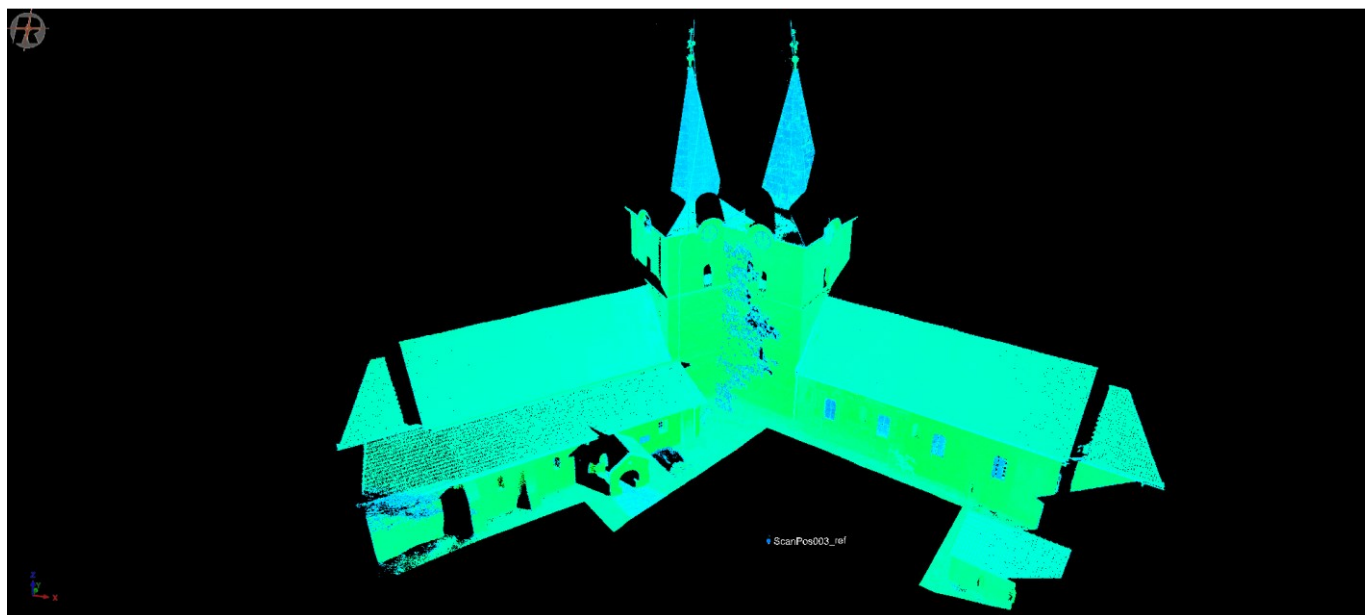
Kroky zberu 3D-2D dát:

- 1) získanie 3D LiDAR skenov z rôznych skenovacích stanovísk tak, aby boli všetky možné body zachytené skenerom,
- 2) získanie širokougľých (24mm resp. 20mm) fotozáberov z jednotlivých skenovacích stanovísk,
- 3) získanie fotozáberov o dôležitých detailoch pomocou teleobjektívu.



2) Fúzia a úprava 3D dát

Výsledkom skenovania sú mračná bodov, ktoré majú určené priestorové súradnice **v rôznych súradnicových systémoch**, tj. v súradnicovom systéme skenera na jednotlivých stanoviiskách.



2) Fúzia a úprava 3D dát

Hlavný cieľ: transformácia jednotlivých 3D mračien bodov získaných z rôznych skenovacích stanovísk do jedného celku, tj. **do spoločného súradnicového systému.**



mračno bodov získané
zo **ScanPose001**

mračno bodov získané
zo **ScanPose002**

...

mračno bodov získané
zo **ScanPoseN**

registrované mračno bodov



2) Fúzia a úprava 3D dát

Hlavný cieľ: transformácia jednotlivých 3D mračien bodov získaných z rôznych skenovacích stanovísk do jedného celku, tj. **do spoločného súradnicového systému.**

Mračná možno transformovať

- do súradnicového systému skenera na zvolenom stanovisku,
- do definovaného súradnicového systému (napr. *štátny súradnicový systém*).



2) Fúzia a úprava 3D dát

Hlavný cieľ: transformácia jednotlivých 3D mračien bodov získaných z rôznych skenovacích stanovísk do jedného celku, tj. **do spoločného súradnicového systému.**

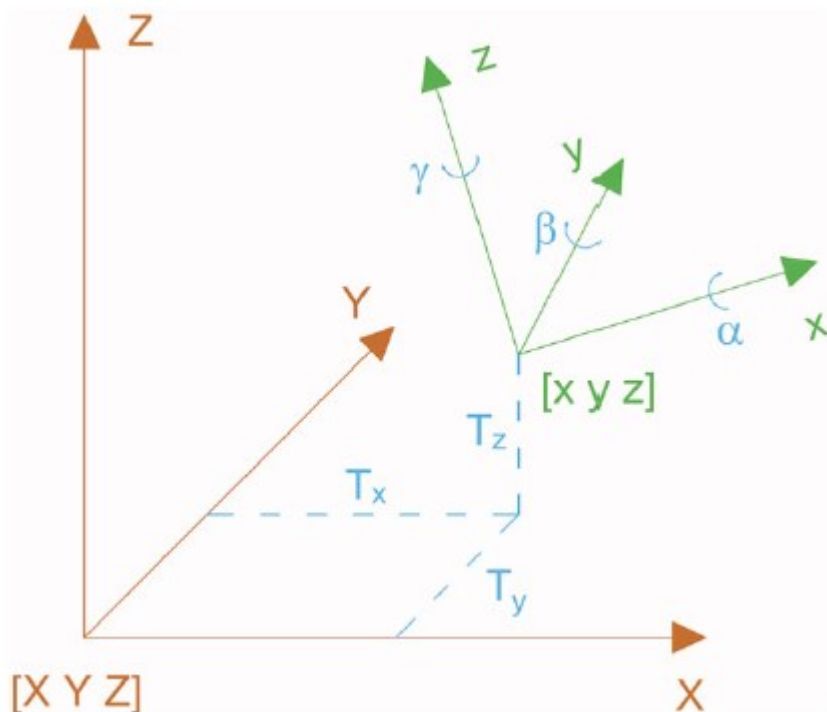
Transformáciu možno vykonať

- na základe **referenčných bodov** (angl. *Target-based registration*) pomocou priestorovej zhodnostnej transformácie,
- metódou **minimálnych vzdialeností bodov** v prekrytových oblastiach dvoch mračien (angl. *Iterative closest point method*),
- na základe **jednoduchých geometrických primitívov** získaných z mračna bodov (angl. *Feature-based registration*).

2) Fúzia a úprava 3D dát

Priestorová zhodnostná transformácia

Určuje sa 6 prvkov transformačného kľúča, ktorými sú 3 translácie počiatku súradnicového systému T_x , T_y , T_z a 3 rotácie okolo jednotlivých osí súradnicového systému o uhly α , β , γ .



Prvky získame riešením rovnice:

$$\mathbf{X} = \mathbf{R} \mathbf{x} + \mathbf{T},$$

kde $\mathbf{X}$ je vektor súradníc bodov vo výslednom súradnicovom systéme, $\mathbf{x}$ je vektor súradníc bodov v transformovanom súradnicovom systéme, $\mathbf{R}$ je ortogonálna rotačná matica, definujúca rotácie okolo osí súradnicového systému a $\mathbf{T}$ je vektor translácií počiatku súradnicového systému pozdĺž jednotlivých osí.



2) Fúzia a úprava 3D dát

Metóda minimálnych vzdialeností bodov

Základný predpoklad transformácie na základe prekrytových oblastí dvoch mračien je, že súčet štvorcov priestorových vzdialeností najbližších bodov medzi dvoma mračnami v týchto oblastiach je minimálny:

$$e^2 = \sum_i \|\mathbf{R} \mathbf{x} + \mathbf{T} - \mathbf{X}\|^2 \rightarrow \min$$

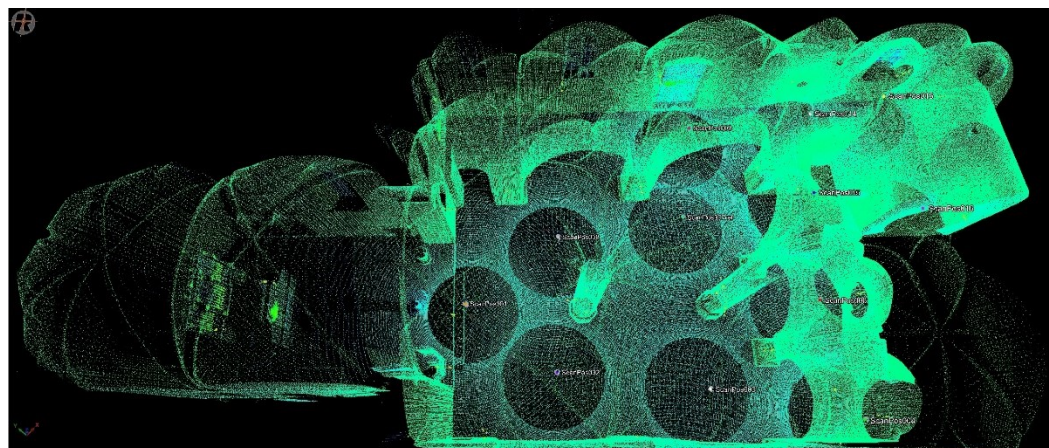
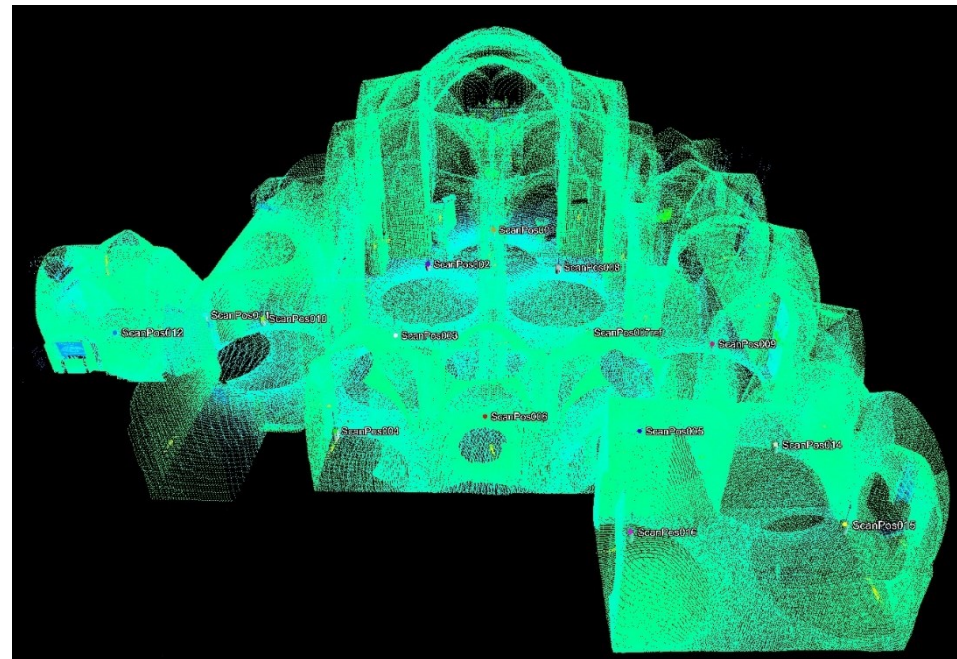
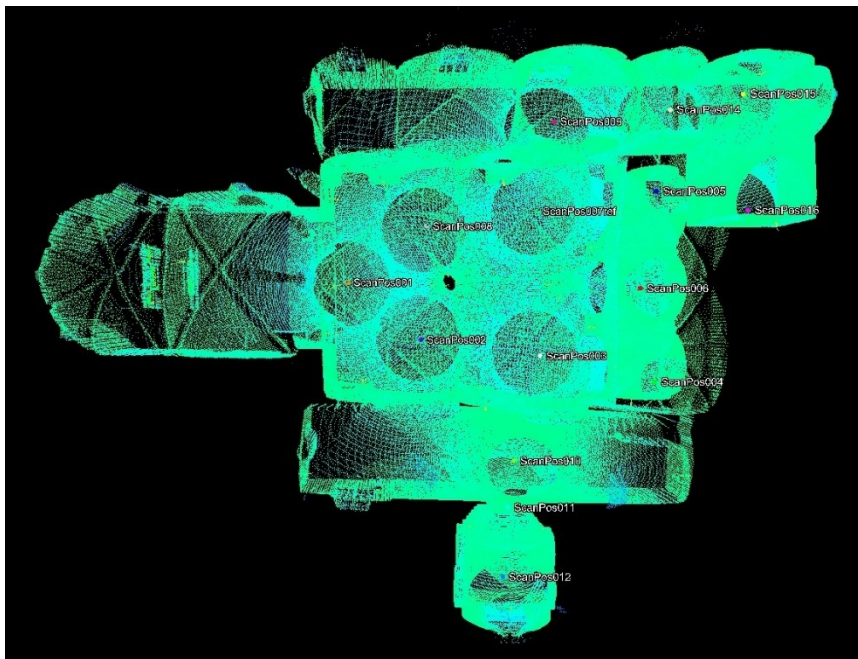
2) Fúzia a úprava 3D dát



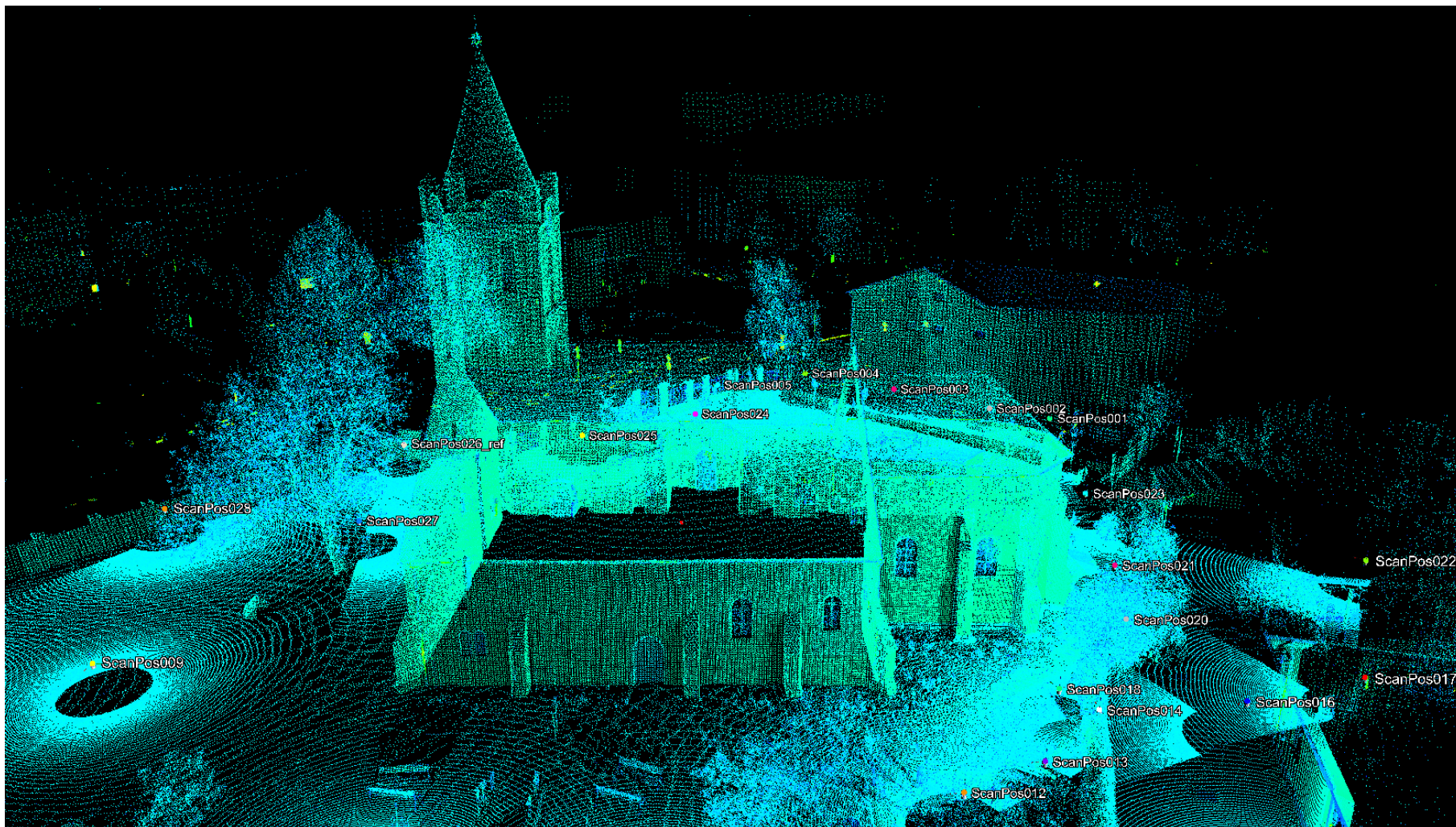
Na registrácii mračien sme použili softvéry **RiSCAN Pro** a **RiSOLVE** spoločnosti RIEGL.

- *v prípade skenovanie v exteriéroch*: registrácia s využitím GPS dát,
- *v prípade skenovanie v interiéroch*: registrácia s využitím referenčných bodov (markerov), prípadne manuálna registrácia.

2) Fúzia a úprava 3D dát



2) Fúzia a úprava 3D dát



Registrované mračno bodov dokumentuje aktuálny stav meraného objektu.



2) Fúzia a úprava 3D dát

Po transformácii mračien do jedného celku možno vykonať ďalšie úpravy:

- **odstránenie bodov nepotrebných na spracovanie** – všetky body, ktoré priamo neležia na povrchu meraného objektu (napr. *objekty nachádzajúce sa v tesnej blízkosti*),
- **odstránenie odrazov** v priestore medzi skenovaným objektom a skenerom (*ľudia, zvieratá, doprava, prach, snehové vločky a pod.*),
- **zníženie počtu bodov mračna** – prerastovanie mračna na zvýšenie homogenity hustoty bodov (*s narastajúcou vzdialenosťou skenovanej časti objektu od skenera hustota meraných bodov klesá, po registrácii v prekrytových oblastiach je hustota bodov výrazne vyššia ako v iných častiach*),



2) Fúzia a úprava 3D dát

Po transformácii mračien do jedného celku možno vykonať ďalšie úpravy:

- **prirad'ovanie farieb k bodom mračna** – to umožní vznik priestorového vnemu; pri monochromatickom zobrazení je totiž veľmi náročné správne vnímať geometriu priestoru.
 - farby na základe intenzity odrazeného meracieho signálu
 - reálne farby na základe digitálnych fotozáberov



3) Fúzia 3D-2D dát

Hlavný cieľ: fúzia fotozáberov s registrovaným mračnom bodov.

Na tento účel sme použili softvér **RiSOLVE**, v ktorom sme pre každý fotozáber určili relatívnu pozíciu kamery vzhľadom ku globálnemu súradnicovému systému.

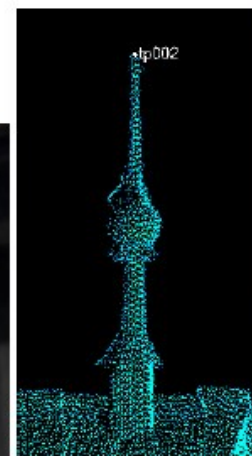
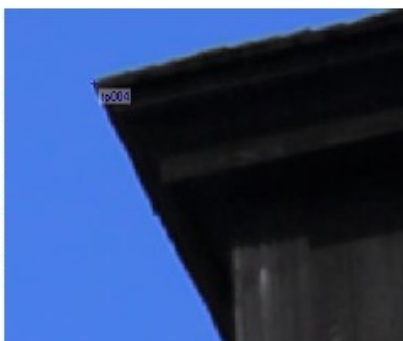
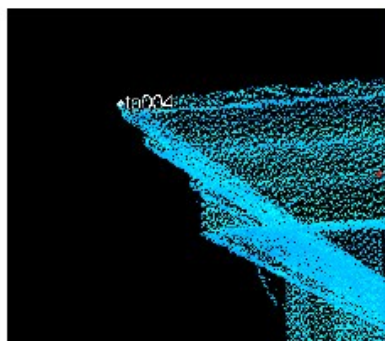
- *V prípade fotozáberov získaných fotoaparátom Nikon sa s pripojením fotozáberov k mračnu bodov nemusíme zaoberať, lebo každý fotozáber získaný z konkrétneho skenovacieho stanoviska bude pripojený k príslušnému mračnu bodov.*

3) Fúzia 3D-2D dát

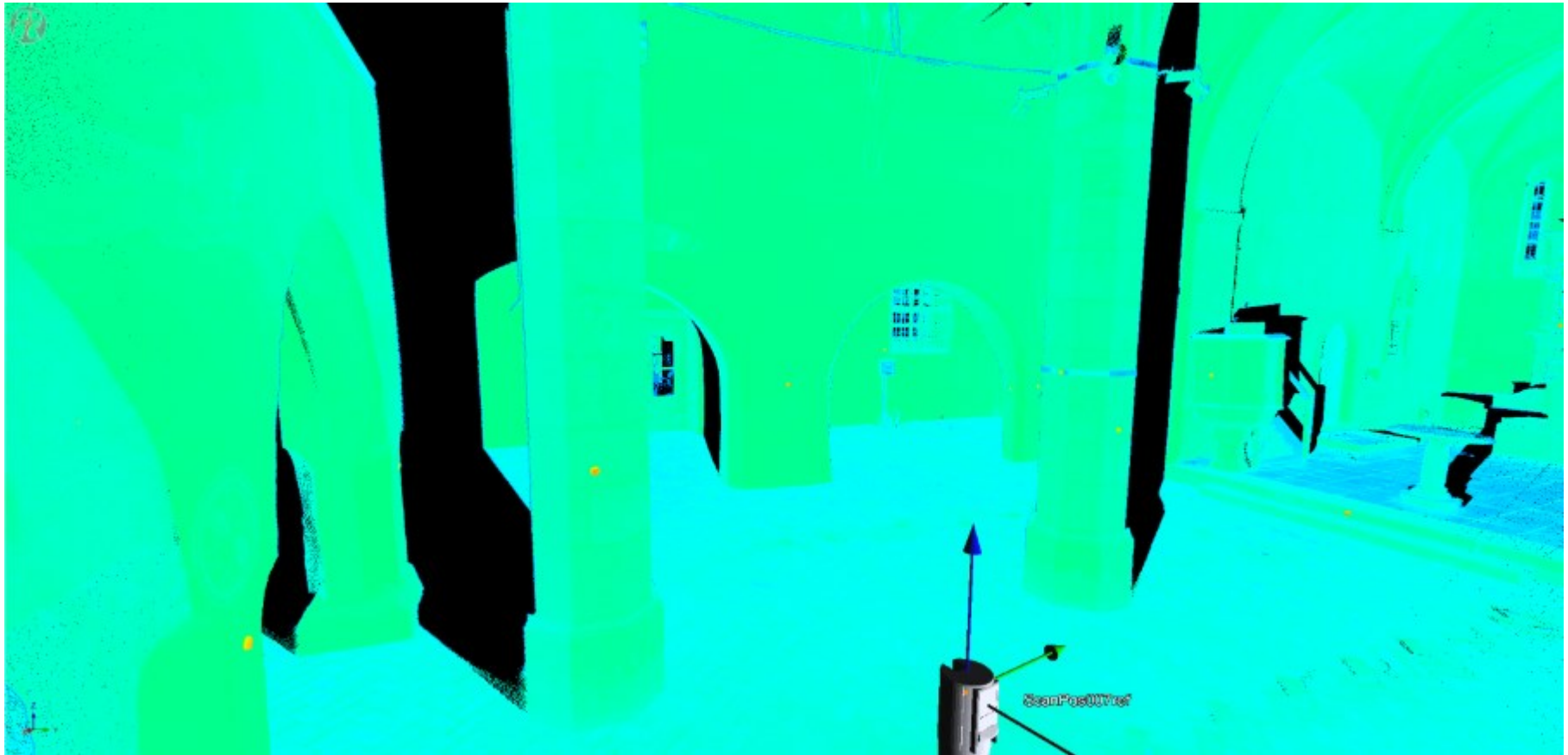
Hlavný cieľ: fúzia fotozáberov s registrovaným mračnom bodov.

Na tento účel sme použili softvér **RiSOLVE**, v ktorom sme pre každý fotozáber určili relatívnu pozíciu kamery vzhľadom ku globálnemu súradnicovému systému.

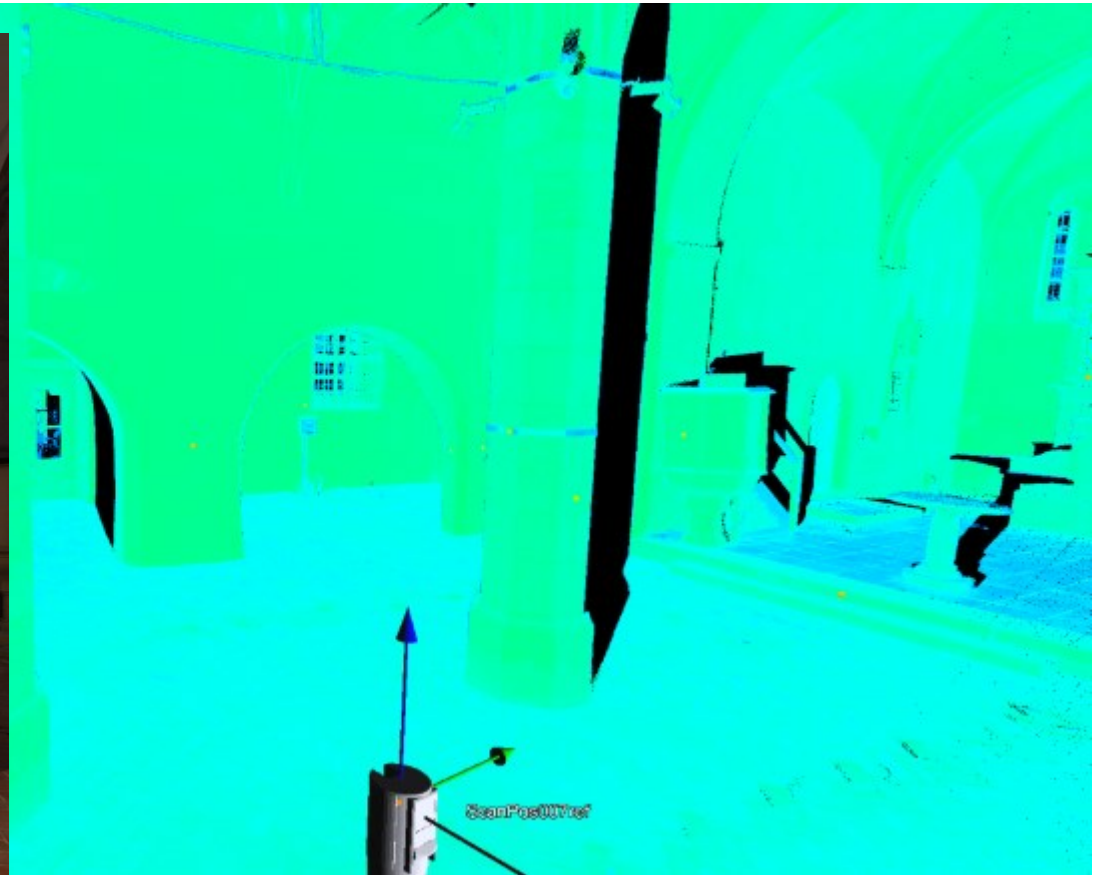
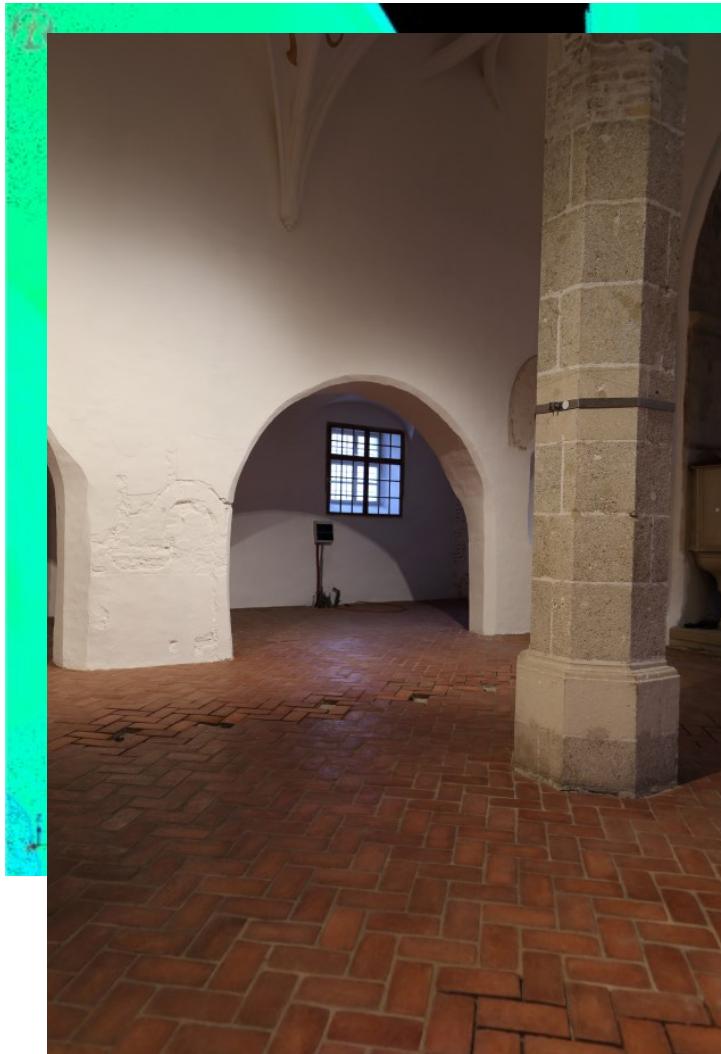
- V prípade fotozáberov získaných fotoaparátom Canon musíme za účelom ich pripojenia k mračnu bodov manuálne určiť dvojice spojovacích bodov, jeden bod na 3D mračne a druhý na 2D širokouhlom fotozábere,



3) Fúzia 3D-2D dát



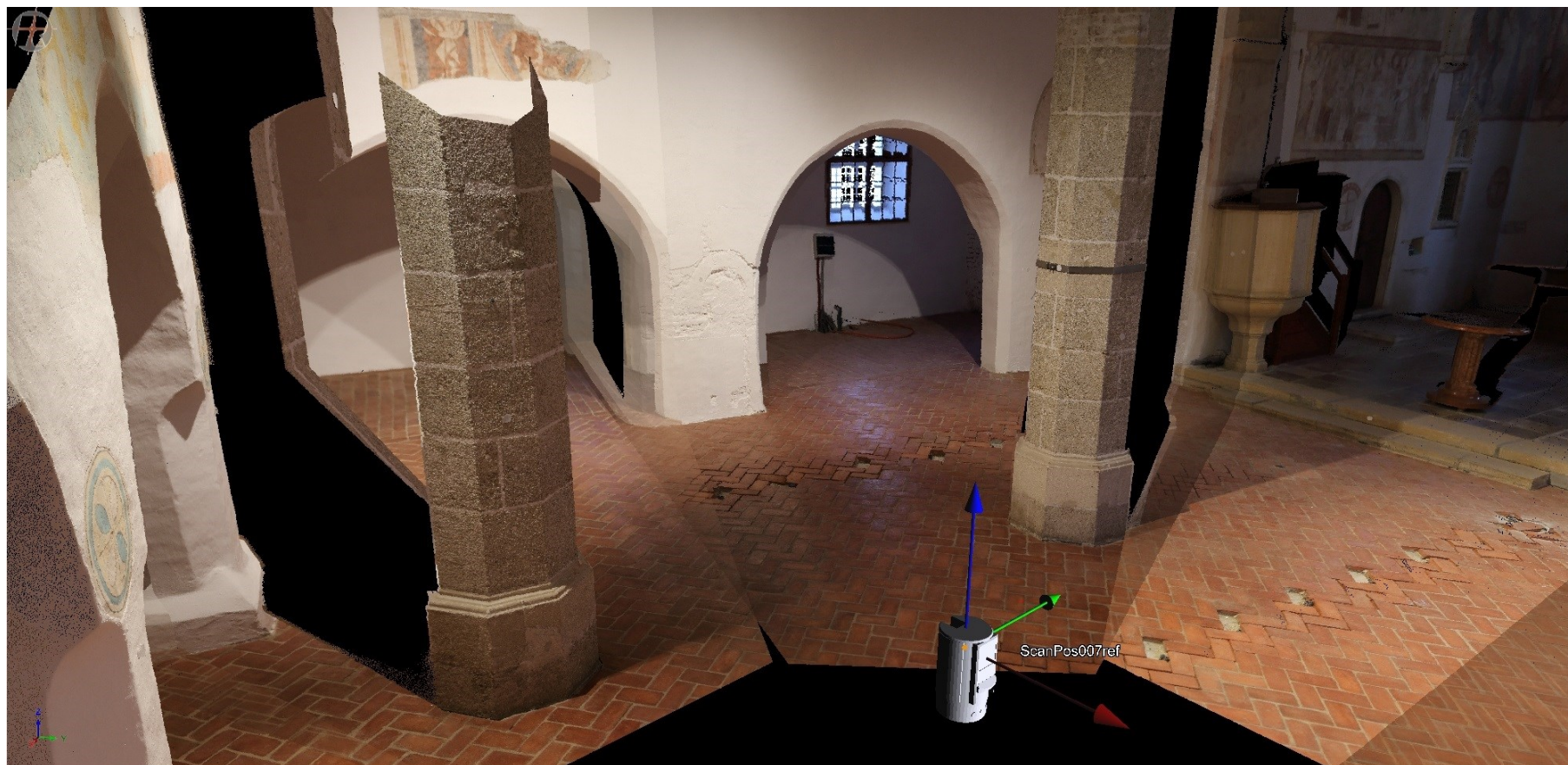
3) Fúzia 3D-2D dát



3) Fúzia 3D-2D dát



3) Fúzia 3D-2D dát

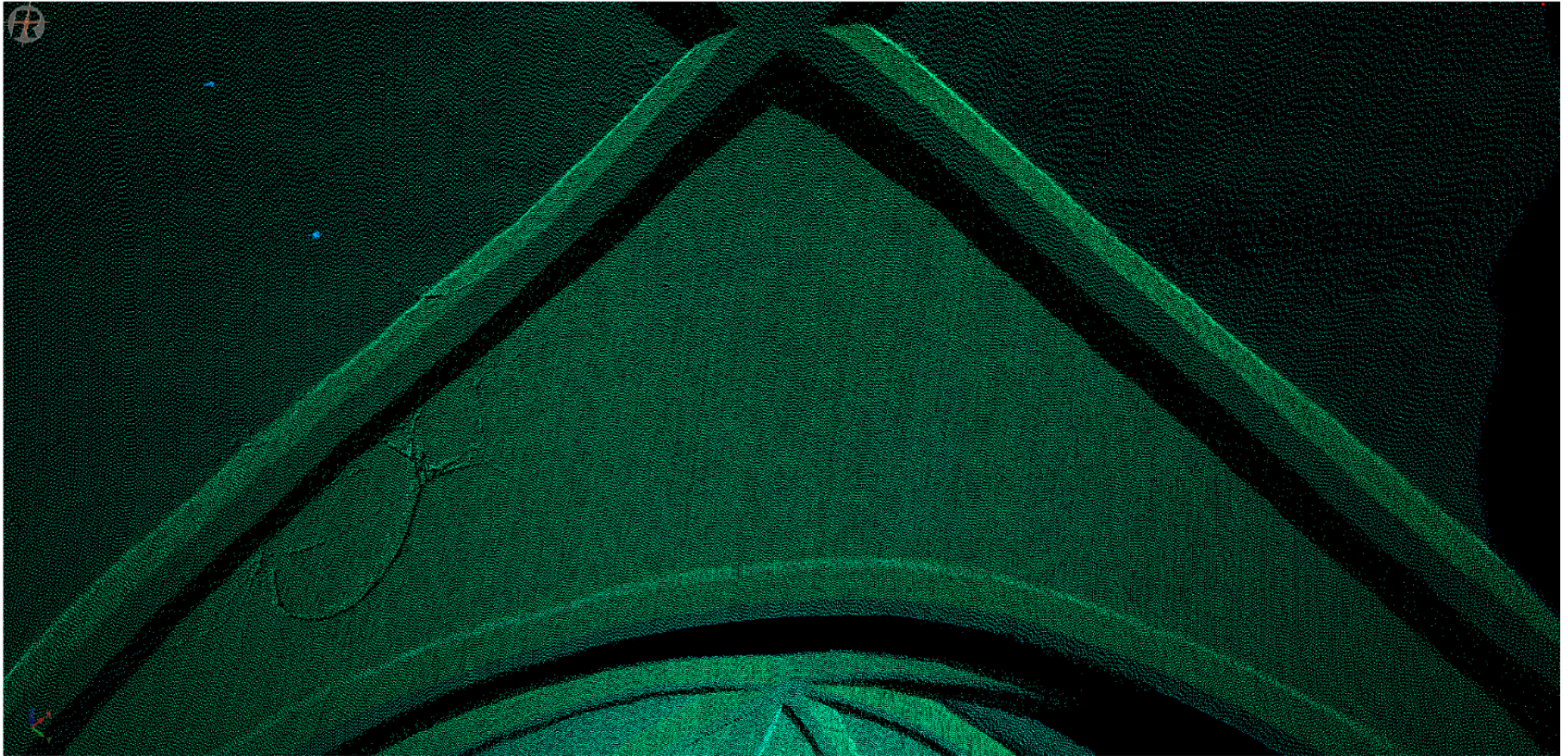


3) Fúzia 3D-2D dát



Freska zobrazujúca korunovanie Panny Márie, reformovaný kostol v Šamoríne

3) Fúzia 3D-2D dát





3) Fúzia 3D-2D dát

Fotozábery získané teleobjektívom – postup v dvoch krokoch:

- I. v prvom kroku je potrebné zafarbiť 3D mračno bodov pomocou širokouhlých fotozáberov,
- II. určenie dvojíc bodov – prvý bod na mračne bodov zafarbenom v kroku I. a druhý bod na 2D fotozábere získaného teleobjektívom.

3) Fúzia 3D-2D dát

Freska zobrazujúca korunovanie Panny Márie:



70 mm teleobjektív



24 mm širokouhlý objektív

Na získanie 3D modelu bohatého na detaily budeme potrebovať obidva typy fotozáberov!

3) Fúzia 3D-2D dát

Presnosť registrácie fotozáberu získaného teleobjektívom:



70 mm

24 mm



4) Zafarbenie mračna bodov

Zatiaľ disponujeme:

- registrovaným mračnom bodov,
- množstvom fotozáberov získaných z rôznych pozícií, ktoré boli registrované ku globálnemu súradnicovému systému 3D mračna.

Hlavný cieľ: na základe pripojených fotozáberov priradiť farebnú informáciu ku každému bodu X mračna.

Podmienky výberu vhodného fotozáberu:

- 1) bod X musí byť viditeľný na fotozábere,
- 2) okolie bodu X musí byť na fotozábere ostré,
- 3) kamera bod X musí vidieť pod optimálnym uhlom,
- 4) detailnosť okolia bodu X musí byť na fotozábere čím väčšie.

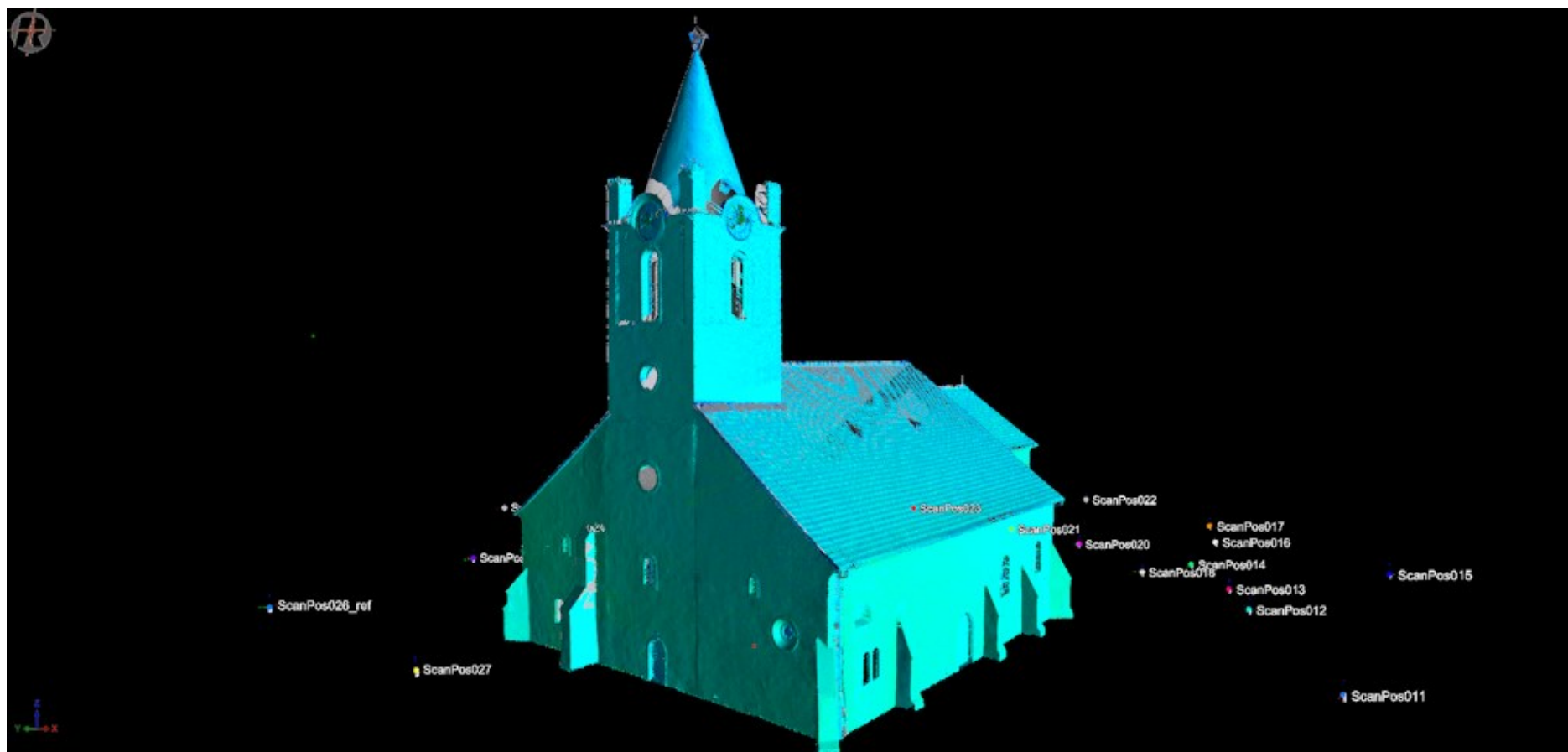


Tvorba priestorových modelov

Na tvorbu 3D modelov možno použiť tri rôzne spôsoby spracovania, resp. ich kombináciu, ktorými sú:

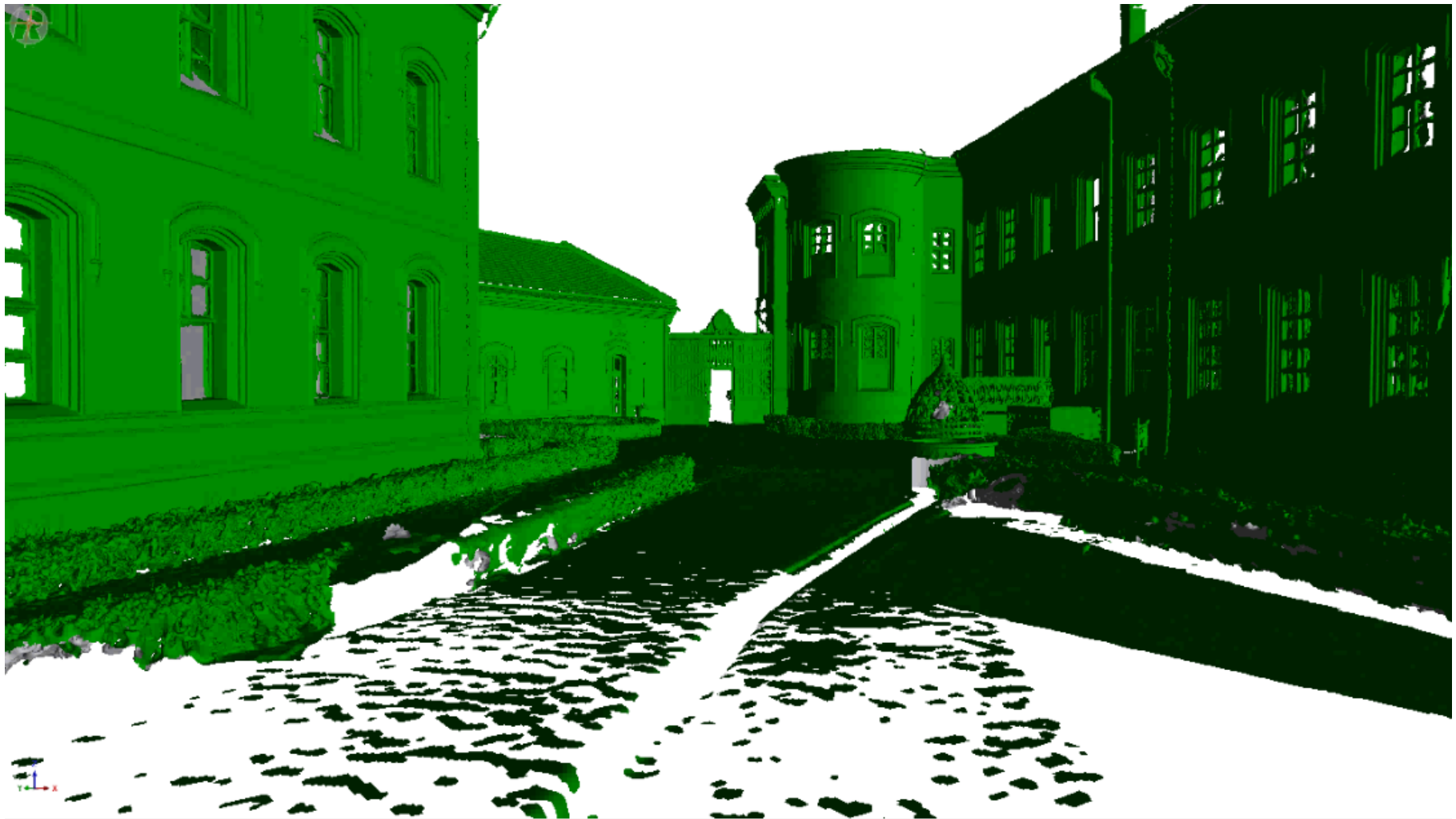
- aproximácia mračien bodov alebo ich častí geometrickými entitami (rovina, valec, kváder, sférická plocha a pod.),
- líniové vyhodnocovanie (tzv. drôtený model)
- vyhodnocovanie pomocou povrchov (napr. *trojuholníkových sietí*).

Tvorba priestorových modelov



Trojuholníková sieť reformovaného kostola v Šamoríne

Tvorba priestorových modelov



Monochromatická trojuholníková sieť Dôstojníckeho pavilónu v Komárne

Tvorba priestorových modelov



Farebná trojuholníková sieť Dôstojníckeho pavilónu v Komárne

3D model kostola sv. Juraja v Kostol'anoch p. Tr.

- jeden z najstarších kostolov na území Slovenska, ktorý bol postavený v XI. storočí,
- prvýkrát sa spomína v listine Zobora z roku 1113,
- pôvodne bola postavená ako malá stavba s pravouhlou loďou a kvadratickou apsidou,
- v XIII. storočí bola postavená nová románska loď a veža,
- v roku 1721 bola pristavená baroková sakristia,
- v rokoch 1964-65 bola baroková sakristia nahradená modernou stavbou.



3D model kostola sv. Juraja v Kostol'anoch p. Tr.



3D model románskej rotundy v Kiszombore, HU

Románska rotunda z XII-XIII. storočia, ktorá má zvonku jednoduchý valcový tvar.

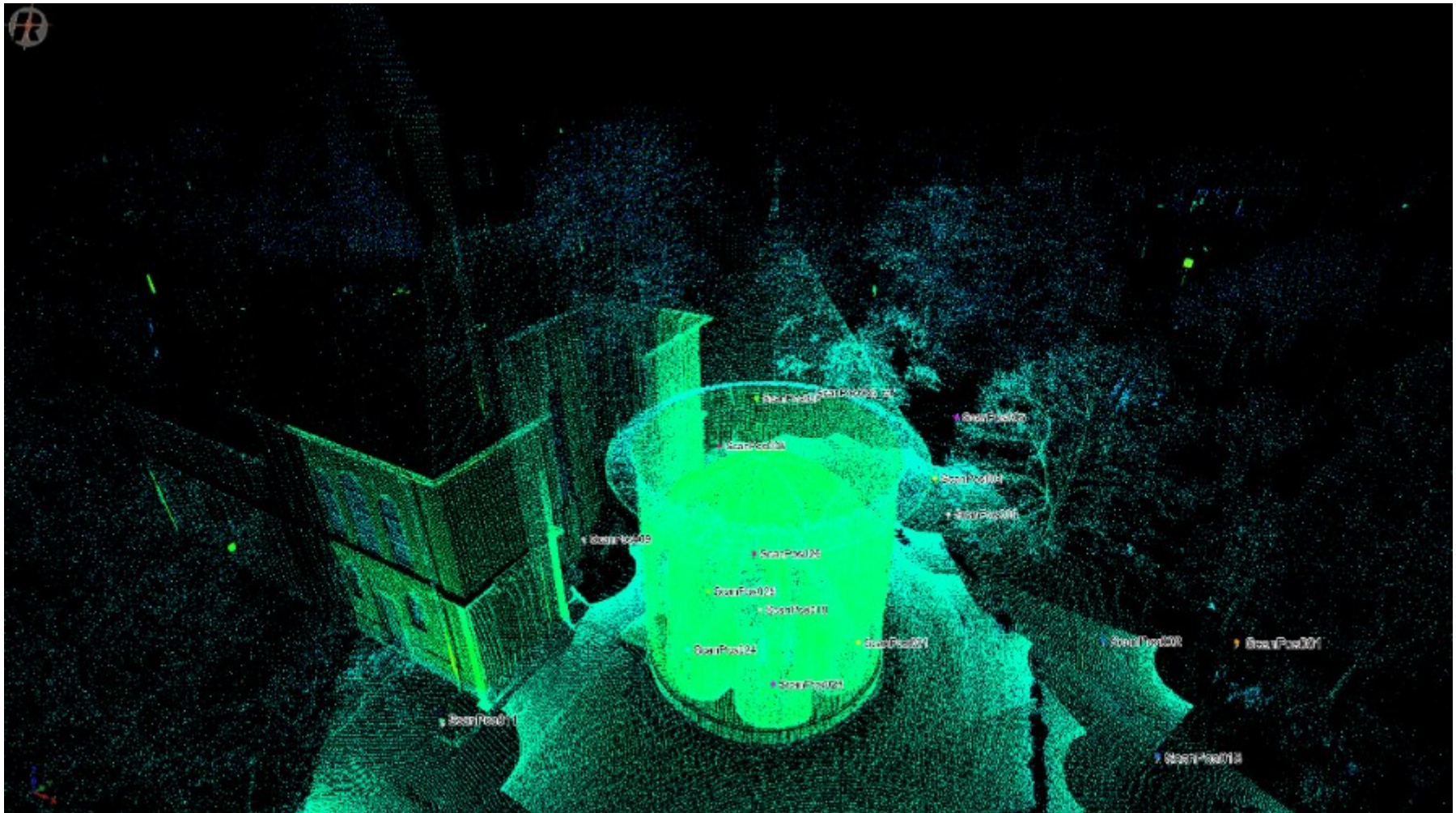


3D model románskej rotundy v Kiszombore, HU

V interiéri nájdeme šesť vnútorných apsíd v hrúbke muriva usporiadaných do šesťuholníka. Tento typ centrálnej stavby má pôvod v ranobyzantskej architektúre a bol neskoršie rozvinutý na území Arménska.



3D model románskej rotundy v Kiszombore, HU



3D model románskej rotundy v Kiszombore, HU





Ďakujem za pozornosť

RNDr. Štefan GUBO, PhD.



Univerzita J. Selyeho
Fakulta ekonómie a informatiky

Bratislavská cesta 3322
945 01 Komárno,
Slovensko

e-mail: gubos@ujs.sk