Primitivní funkce

Matematická analýza LS 2019/20

Linearita

Příklad

$$\int x^3 + 2\sqrt{x} + \frac{17}{x}\,\mathrm{d}x$$

Linearita

Příklad

$$\int x^3 + 2\sqrt{x} + \frac{17}{x}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Nejprve aplikujeme linearitu integrálu a pak tabulkové integrály:

$$\int x^3 + 2\sqrt{x} + \frac{17}{x}\,\mathrm{d}x$$

Linearita

Příklad

$$\int x^3 + 2\sqrt{x} + \frac{17}{x}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Nejprve aplikujeme linearitu integrálu a pak tabulkové integrály:

$$\int x^3 + 2\sqrt{x} + \frac{17}{x}\,\mathrm{d}x = \int x^3\,\mathrm{d}x + 2\int x^{1/2}\,\mathrm{d}x + 17\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Linearita

Příklad

$$\int x^3 + 2\sqrt{x} + \frac{17}{x}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Nejprve aplikujeme linearitu integrálu a pak tabulkové integrály:

$$\int x^3 + 2\sqrt{x} + \frac{17}{x}\,\mathrm{d}x = \int x^3\,\mathrm{d}x + 2\int x^{1/2}\,\mathrm{d}x + 17\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\stackrel{C}{=} \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 17\ln|x|$$

Linearita

Příklad

$$\int x^3 + 2\sqrt{x} + \frac{17}{x}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Nejprve aplikujeme linearitu integrálu a pak tabulkové integrály:

$$\begin{aligned}\int x^3 + 2\sqrt{x} + \frac{17}{x}\,\mathrm{d}x &= \int x^3\,\mathrm{d}x + 2\int x^{1/2}\,\mathrm{d}x + 17\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &\overset{C}{=} \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 17\ln|x| \\ &= \frac{x^4}{4} + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + 17\ln|x|, \qquad x \in (0,\infty).\end{aligned}$$

První věta o substituci

Věta (První věta o substituci)

Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Nechť φ je funkce definovaná na intervalu (α, β) s hodnotami v (a, b), která má v každém bodě (α, β) vlastní derivaci. Pak

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} F(\varphi(x)), \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Substituce

Příklad

$$\int \frac{\arctan x}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x$$

Příklad

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $\varphi(x) = \arctan x$, kde $x \in (-\infty, \infty) = (\alpha, \beta)$, a $f(y) = y$, kde $y \in (-\infty, \infty) = (a, b)$. Dále $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ a $F(y) = \frac{y^2}{2}$.

Příklad

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Položme $\varphi(x) = \arctan x$, kde $x \in (-\infty, \infty) = (\alpha, \beta)$, a $f(y) = y$, kde $y \in (-\infty, \infty) = (a, b)$. Dále $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ a $F(y) = \frac{y^2}{2}$. Podle věty o substituci máme

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx \overset{C}{=} \frac{\arctan {}^2 x}{2}.$$

Substituce

Příklad

$$\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Substituce

Příklad

$$\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Nejprve upravíme

$$\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int -2xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Substituce

Příklad

$$\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Nejprve upravíme

$$\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int -2xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Nyní můžeme použít větu o substituci. Položme $\varphi(x) = -x^2$, kde $x \in (-\infty, \infty) = (\alpha, \beta)$, a $f(y) = e^y$, kde $y \in (-\infty, \infty) = (a, b)$. Dále $\varphi'(x) = -2x$ a $F(y) = e^y$.

Příklad

$$\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Nejprve upravíme

$$\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int -2xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Nyní můžeme použít větu o substituci. Položme $\varphi(x) = -x^2$, kde $x \in (-\infty,\infty) = (\alpha,\beta)$, a $f(y) = e^y$, kde $y \in (-\infty,\infty) = (a,b)$. Dále $\varphi'(x) = -2x$ a $F(y) = e^y$.
Podle věty o substituci máme

$$\int xe^{-x^2}\,dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2}e^{-x^2}, \quad x \in (-\infty,\infty).$$

Per partes

Věta (Integrace per partes)

Nechť I je neprázdný otevřený interval a funkce f je spojitá na I. Nechť F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I. Pak platí

$$\int g(x)F(x)\,\mathrm{d}x = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\,\mathrm{d}x \text{ na } I.$$

Per partes

Příklad

$$\int xe^x \, \mathrm{d}x$$

Per partes

Příklad

$$\int xe^x \,\mathrm{d}x$$

Řešení: Zvolme $g = e^x$, $F = x$, pak $G = e^x, f = 1$.

Per partes

Příklad

$$\int xe^x \, \mathrm{d}x$$

Řešení: Zvolme $g = e^x$, $F = x$, pak $G = e^x$, $f = 1$. Funkce f je spojitá na $\mathbb{R} = I$.

Per partes

Příklad

$$\int xe^x \,\mathrm{d}x$$

Řešení: Zvolme $g = e^x$, $F = x$, pak $G = e^x, f = 1$. Funkce f je spojitá na $\mathbb{R} = I$. Z per partes pak

$$\int xe^x \, dx = [xe^x] - \int e^x \, dx$$

Příklad

$$\int xe^x \,\mathrm{d}x$$

Řešení: Zvolme $g = e^x$, $F = x$, pak $G = e^x, f = 1$. Funkce f je spojitá na $\mathbb{R} = I$. Z per partes pak

$$\int xe^x \,dx = [xe^x] - \int e^x \,dx \stackrel{C}{=} xe^x - e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Per partes

Příklad

$$\int \ln x \,\mathrm{d}x$$

Příklad

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x$$

Řešení: Prve rozepíšeme

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x \, \mathrm{d}x.$$

Příklad

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x$$

Řešení: Prve rozepíšeme

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x \, \mathrm{d}x.$$

Položme $g(x) = 1$, $F(x) = \ln x$, kde $x \in (0, \infty) = I$. Potom $G(x) = \int 1 \, dx = x$ a $f(x) = \frac{1}{x}$.

Per partes

Příklad

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x$$

Řešení: Prve rozepíšeme

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x \, \mathrm{d}x.$$

Položme $g(x) = 1$, $F(x) = \ln x$, kde $x \in (0, \infty) = I$. Potom $G(x) = \int 1 \, dx = x$ a $f(x) = \frac{1}{x}$. Funkce f je spojitá na I. Použitím vztahu pro integraci per partes dostáváme

Per partes

Příklad

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x$$

Řešení: Prve rozepíšeme

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x \, \mathrm{d}x.$$

Položme $g(x) = 1$, $F(x) = \ln x$, kde $x \in (0, \infty) = I$. Potom $G(x) = \int 1 \, dx = x$ a $f(x) = \frac{1}{x}$. Funkce f je spojitá na I. Použitím vztahu pro integraci per partes dostáváme

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx = [x \ln x] - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

Per partes

Příklad

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x$$

Řešení: Prve rozepíšeme

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x \, \mathrm{d}x.$$

Položme $g(x) = 1$, $F(x) = \ln x$, kde $x \in (0, \infty) = I$. Potom $G(x) = \int 1 \, dx = x$ a $f(x) = \frac{1}{x}$. Funkce f je spojitá na I. Použitím vztahu pro integraci per partes dostáváme

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx = [x \ln x] - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = [x \ln x] - \int 1 \, dx$$

Per partes

Příklad

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x$$

Řešení: Prve rozepíšeme

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x \, \mathrm{d}x.$$

Položme $g(x) = 1$, $F(x) = \ln x$, kde $x \in (0, \infty) = I$. Potom $G(x) = \int 1 \, dx = x$ a $f(x) = \frac{1}{x}$. Funkce f je spojitá na I. Použitím vztahu pro integraci per partes dostáváme

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx = [x \ln x] - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = [x \ln x] - \int 1 \, dx \overset{C}{=} x \ln x - x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Per partes

Příklad

$$\int e^{ax} \cos bx, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Příklad

$$\int e^{ax} \cos bx, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Řešení:

Pro $a = b = 0$ je

Per partes

Příklad

$$\int e^{ax} \cos bx, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Řešení:
Pro $a = b = 0$ je $\int e^{0x} \cos(0x)\ \mathrm{d}x = \int 1\ \mathrm{d}x \overset{C}{=} x$, $x \in \mathbb{R}$.
Nyní předpokládejme, že $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Per partes

Příklad

$$\int e^{ax} \cos bx, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Řešení:

Pro $a = b = 0$ je $\int e^{0x} \cos(0x) \, \mathrm{d}x = \int 1 \, \mathrm{d}x \stackrel{C}{=} x$, $x \in \mathbb{R}$.
Nyní předpokládejme, že $a \neq 0$, $b \neq 0$. Použijeme dvakrát integraci per partes.

Per partes

Příklad

$$\int e^{ax} \cos bx, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Řešení:
Pro $a = b = 0$ je $\int e^{0x} \cos(0x)\ \mathrm{d}x = \int 1\ \mathrm{d}x \stackrel{C}{=} x$, $x \in \mathbb{R}$.
Nyní předpokládejme, že $a \neq 0$, $b \neq 0$. Použijeme dvakrát integraci per partes. Prve položme $F = e^{ax}$, $g = \cos bx$. Pak $f = ae^{ax}$ a $G = \frac{1}{b} \sin bx$.

Per partes

Příklad

$$\int e^{ax} \cos bx, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Řešení:

Pro $a = b = 0$ je $\int e^{0x} \cos(0x)\ \mathrm{d}x = \int 1\ \mathrm{d}x \overset{C}{=} x$, $x \in \mathbb{R}$.
Nyní předpokládejme, že $a \neq 0$, $b \neq 0$. Použijeme dvakrát integraci per partes. Prve položme $F = e^{ax}$, $g = \cos bx$. Pak $f = ae^{ax}$ a $G = \frac{1}{b} \sin bx$. Funkce f je spojitá na $\mathbb{R} = I$.

Per partes

Příklad

$$\int e^{ax} \cos bx, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Řešení:
Pro $a = b = 0$ je $\int e^{0x} \cos(0x)\ \mathrm{d}x = \int 1\ \mathrm{d}x \stackrel{C}{=} x, x \in \mathbb{R}$.
Nyní předpokládejme, že $a \neq 0$, $b \neq 0$. Použijeme dvakrát integraci per partes. Prve položme $F = e^{ax}$, $g = \cos bx$. Pak $f = ae^{ax}$ a $G = \frac{1}{b} \sin bx$. Funkce f je spojitá na $\mathbb{R} = I$. Aplikací per partes dostáváme

$$\int e^{ax} \cos bx\ \mathrm{d}x = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx\ \mathrm{d}x$$

Příklad

$$\int e^{ax}\cos bx, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Řešení:
Pro $a = b = 0$ je $\int e^{0x}\cos(0x)\ \mathrm{d}x = \int 1\ \mathrm{d}x \overset{C}{=} x$, $x \in \mathbb{R}$.
Nyní předpokládejme, že $a \neq 0$, $b \neq 0$. Použijeme dvakrát integraci per partes. Prve položme $F = e^{ax}$, $g = \cos bx$. Pak $f = ae^{ax}$ a $G = \frac{1}{b}\sin bx$. Funkce f je spojitá na $\mathbb{R} = I$. Aplikací per partes dostáváme

$$\int e^{ax}\cos bx\ \mathrm{d}x = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\ \mathrm{d}x$$

Na integrál vpravo aplikujeme druhé per partes,

Příklad

$$\int e^{ax}\cos bx, \quad a,b\in\mathbb{R}$$

Řešení:
Pro $a=b=0$ je $\int e^{0x}\cos(0x)\,\mathrm{d}x=\int 1\,\mathrm{d}x\overset{C}{=}x$, $x\in\mathbb{R}$.
Nyní předpokládejme, že $a\neq 0$, $b\neq 0$. Použijeme dvakrát integraci per partes. Prve položme $F=e^{ax}$, $g=\cos bx$. Pak $f=ae^{ax}$ a $G=\frac{1}{b}\sin bx$. Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}=I$. Aplikací per partes dostáváme

$$\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$$

Na integrál vpravo aplikujeme druhé per partes, kde $F=e^{ax}$, $g=\sin bx$. Pak $f=ae^{ax}$ a $G=-\frac{1}{b}\cos bx$.

Per partes

Příklad

$$\int e^{ax} \cos bx, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Řešení:

Pro $a = b = 0$ je $\int e^{0x} \cos(0x)\ \mathrm{d}x = \int 1\ \mathrm{d}x \overset{C}{=} x, x \in \mathbb{R}$.
Nyní předpokládejme, že $a \neq 0$, $b \neq 0$. Použijeme dvakrát integraci per partes. Prve položme $F = e^{ax}$, $g = \cos bx$. Pak $f = ae^{ax}$ a $G = \frac{1}{b} \sin bx$. Funkce f je spojitá na $\mathbb{R} = I$. Aplikací per partes dostáváme

$$\int e^{ax} \cos bx\ \mathrm{d}x = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx\ \mathrm{d}x$$

Na integrál vpravo aplikujeme druhé per partes, kde $F = e^{ax}$, $g = \sin bx$. Pak $f = ae^{ax}$ a $G = -\frac{1}{b} \cos bx$. Funkce f je spojitá na $\mathbb{R} = I$. Pak

Příklad

$$\int e^{ax}\cos bx, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Řešení:

Pro $a = b = 0$ je $\int e^{0x}\cos(0x)\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} x$, $x \in \mathbb{R}$.
Nyní předpokládejme, že $a \neq 0$, $b \neq 0$. Použijeme dvakrát integraci per partes. Prve položme $F = e^{ax}$, $g = \cos bx$. Pak $f = ae^{ax}$ a $G = \frac{1}{b}\sin bx$. Funkce f je spojitá na $\mathbb{R} = I$. Aplikací per partes dostáváme

$$\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$$

Na integrál vpravo aplikujeme druhé per partes, kde $F = e^{ax}$, $g = \sin bx$. Pak $f = ae^{ax}$ a $G = -\frac{1}{b}\cos bx$. Funkce f je spojitá na $\mathbb{R} = I$. Pak

$$\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx = -\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx + \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x.$$

Příklad

Dohromady tedy máme

$$\int e^{ax}\cos bx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx \,\mathrm{d}x.$$

Per partes

Příklad

Dohromady tedy máme

$$\int e^{ax} \cos bx \; \mathrm{d}x = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bx \; \mathrm{d}x.$$

Převedením obou integrálů na levou stranu rovnice získáme

Příklad

Dohromady tedy máme

$$\int e^{ax} \cos bx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bx \, \mathrm{d}x.$$

Převedením obou integrálů na levou stranu rovnice získáme

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \int e^{ax} \cos bx \, \mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx$$

Per partes

Příklad

Dohromady tedy máme

$$\int e^{ax}\cos bx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx \,\mathrm{d}x.$$

Převedením obou integrálů na levou stranu rovnice získáme

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\cos bx \,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx$$

a tedy

$$\begin{aligned}\int e^{ax}\cos bx \,\mathrm{d}x &\stackrel{C}{=} \frac{b}{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{a^2+b^2}e^{ax}\cos bx\\ &= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(b\sin bx + a\cos bx\right).\end{aligned}$$

Příklad

Dohromady tedy máme

$$\int e^{ax}\cos bx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx \,\mathrm{d}x.$$

Převedením obou integrálů na levou stranu rovnice získáme

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\cos bx \,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx$$

a tedy

$$\begin{aligned}\int e^{ax}\cos bx \,\mathrm{d}x &\overset{C}{=} \frac{b}{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{a^2+b^2}e^{ax}\cos bx\\ &= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(b\sin bx + a\cos bx\right).\end{aligned}$$

Lze ověřit – například zderivováním, že výsledek platí i pro $b=0$, pokud $a\neq 0$, a také pro $a=0$, pokud $b\neq 0$.

Per partes + substituce

Příklad

$$\int \arctan x \,\mathrm{d}x$$

Per partes + substituce

Příklad

$$\int \arctan x \,\mathrm{d}x$$

Řešení:

$$\int \arctan x \,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \arctan x \,\mathrm{d}x$$

Příklad

$$\int \arctan x \, \mathrm{d}x$$

Řešení:

$$\int \arctan x \, \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \arctan x \, \mathrm{d}x$$

Položme $g = 1$, $G = x$, $F = \arctan x$, $f = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$,

Příklad

$$\int \arctan x \, \mathrm{d}x$$

Řešení:

$$\int \arctan x \, \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \arctan x \, \mathrm{d}x$$

Položme $g = 1$, $G = x$, $F = \arctan x$, $f = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, f je spojitá na $\mathbb{R}$.

Per partes + substituce

Příklad

$$\int \arctan x \, \mathrm{d}x$$

Řešení:

$$\int \arctan x \, \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \arctan x \, \mathrm{d}x$$

Položme $g = 1$, $G = x$, $F = \arctan x$, $f = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, f je spojitá na $\mathbb{R}$.
Aplikujeme per partes:

Per partes + substituce

Příklad

$$\int \arctan x \, \mathrm{d}x$$

Řešení:

$$\int \arctan x \, \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \arctan x \, \mathrm{d}x$$

Položme $g = 1$, $G = x$, $F = \arctan x$, $f = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, f je spojitá na $\mathbb{R}$.
Aplikujeme per partes:

$$\int 1 \cdot \arctan x \, dx = [x\arctan x] - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx.$$

Per partes + substituce

Příklad

Integrál
$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

Per partes + substituce

Příklad

Integrál
$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

Per partes + substituce

Příklad

Integrál

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

vyřešíme substitucí, kde $\varphi(x) = 1 + x^2$, $\varphi'(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R} = (\alpha, \beta)$, a kde $f(y) = \frac{1}{y}$, $y \in (0, \infty) = (a, b)$.

Per partes + substituce

Příklad

Integrál
$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$
vyřešíme substitucí, kde $\varphi(x) = 1 + x^2$, $\varphi'(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R} = (\alpha, \beta)$, a kde $f(y) = \frac{1}{y}$, $y \in (0, \infty) = (a, b)$. Navíc $\varphi : (-\infty, \infty) \to (0, \infty)$.

Per partes + substituce

Příklad

Integrál
$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$
vyřešíme substitucí, kde $\varphi(x) = 1 + x^2$, $\varphi'(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R} = (\alpha, \beta)$, a kde $f(y) = \frac{1}{y}$, $y \in (0, \infty) = (a, b)$. Navíc $\varphi : (-\infty, \infty) \to (0, \infty)$. Pak $F(y) = \ln|y|$ a

Per partes + substituce

Příklad

Integrál

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

vyřešíme substitucí, kde $\varphi(x) = 1 + x^2$, $\varphi'(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R} = (\alpha, \beta)$, a kde $f(y) = \frac{1}{y}$, $y \in (0, \infty) = (a, b)$. Navíc $\varphi : (-\infty, \infty) \to (0, \infty)$. Pak $F(y) = \ln|y|$ a

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

Per partes + substituce

Příklad

Integrál

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

vyřešíme substitucí, kde $\varphi(x) = 1 + x^2$, $\varphi'(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R} = (\alpha, \beta)$, a kde $f(y) = \frac{1}{y}$, $y \in (0, \infty) = (a, b)$. Navíc $\varphi : (-\infty, \infty) \to (0, \infty)$. Pak $F(y) = \ln|y|$ a

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{2}\ln|1+x^2|.$$

Per partes + substituce

Příklad

Integrál
$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$
vyřešíme substitucí, kde $\varphi(x) = 1 + x^2$, $\varphi'(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R} = (\alpha, \beta)$, a kde $f(y) = \frac{1}{y}$, $y \in (0, \infty) = (a, b)$. Navíc $\varphi : (-\infty, \infty) \to (0, \infty)$. Pak $F(y) = \ln|y|$ a
$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{2}\ln|1+x^2|.$$
Dohromady pak máme
$$\int 1 \cdot \arctan x\,dx \stackrel{C}{=} x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$