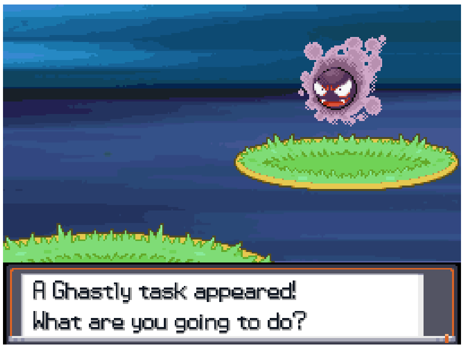
Sada 3 (deadline 1.5. 23:59)

3.1 Bitva Pokémonů



Během hledání nových Pokémonů na tebe zpoza křoví vyskočil divoký Charmander, po ruce máš pouze svého Pikachu. Máš začít utíkat?

Pikachu je velmi odolný, podle tvého Pokedexu má 100 HP. Při útoku generuje elektrický výboj který soupeře zraní za $HP_{pikachu} \times 0.1$ (tj. čím více života má, tím více škod dává). Nicméně je také trošičku natvrdlý, a proto dostane taktéž ránu od svého výboje za $HP_{pikachu} \times 0.05$.

Charmander je oproti tomu chytrý, a proto se snaží během boje léčit. Vyléčí si vždy 10% aktuálního počtu svých HP. Každé kolo zároveň udělí soupeři poškození $HP_{charmander} \times 0.2$. Na počátku má 50 HP.

Boj probíhá v kolech. V každém kole útočí oba Pokémoni najednou. Pokud Pokémon má po daném kole záporný počet životů (HP), pak toto kolo umřel. Najděte explicitní vzorec pro výpočet počtu životů pro oba Pokémony v n-tém kole a rozhodněte, kdy nejpozději musíte utéct, pokud si nechcete začít shánět nového Pokémona.

3.2 Sakrální navigační systém

V jedné drobné vesnici na Netolicku se nalezly záznamy o církevních experimentech se sakrální navigací, která umožňovala putujícím kněžím určit svou přesnou pozici podle vzdálenosti k nejbližším kapličkám v okolních vesnicích. Ačkoliv princip měření vzdálenosti je ztracen, stále jsme jistě schopni použít pokročilé matematické metody, abychom souřadnice dekódovali. U těchto zánamů byla i zpráva od kněze, který tento projekt vedl (viz níže). Předpokládáme, že tam najdeme více záznamů – dokážete toto místo najít?

> Vážený Otče Michaeli, podařilo se mi urychlit SAKrální Relokační Algoritmus (SAKRA) použítím jakési hatlamatilky, kterou ta banda neznabohů u Jeruzaléma nazývá **al-jabr**. Nyní si kněz může snadno spočítat svou pozici na kusu papíru! Stavte se někdy za mnou do
>
> (1171 m : Nestánice, 2758 m : Hradiště, 2716 m : Malovice).

3.3 Symetrie

1. Většina z vás použila při řešení 1.DÚ bez důkazu následující tvrzení. Dokažte jej.

   A, B symetrické matice, které definují stejnou kvadratickou formu, tj. $\forall x$: $x^T Ax = x^T Bx$. Ukažte, že pak nutně $A = B$.

2. P, Q jsou symetrické matice. Pro následující tvrzení najděte buďto důkaz nebo protipříklad:

   (a) $P \succ 0 \Rightarrow P^{-1} \succ 0$,

   (b) $P \succcurlyeq Q \succ 0 \Rightarrow P^{-1} \preccurlyeq Q^{-1}$,

   (c) $P \succcurlyeq Q \Rightarrow P^2 \succcurlyeq Q^2$.

3. Vyjádřete $\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)^2$ ve form2 $x^T Px$ pro $P = P^T$. Platí $P \succcurlyeq 0$? Platí $P \succ 0$?

3.4 Opět trable s maticovými nerovnostmi

A, B jsou reálné symetrické matice řádu $n \in \mathbb{N}$. $\lambda_i(X)$ bude označovat i-té vlastní číslo matice X při uspořádání $\lambda_1(X) \geq \lambda_2(X) \geq \cdots \geq \lambda_n(X)$. Jako obvykle symbol $\succeq$ bude použit ve smyslu definice: $A \succeq B \Leftrightarrow A - B$ pozitivně semidefinitní. Dokažte nebo najděte protipříklad pro následující tvrzení:

1. $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \lambda_i(A) \geq \lambda_i(B) \Rightarrow A \succcurlyeq B$,
2. $\{x | x^T Ax \leq 1\} \subseteq \{x | x^T Bx \leq 1\} \Rightarrow A \succcurlyeq B$,
3. $A \preccurlyeq B \Rightarrow \{x | x^T Ax \leq 1\} \subseteq \{x | x^T Bx \leq 1\}$,
4. A, B mají stejná vlastní čísla, pak $\exists Q$ ortogonální : $A = Q^T BQ$,
5. $\exists Q$ ortogonální : $A = Q^T BQ$, pak A, B mají stejná vlastní čísla,
6. $A \succcurlyeq B \Rightarrow \forall t > 0 : e^{At} \succcurlyeq e^{At}$,
7. $A \succcurlyeq B \Rightarrow \forall i, j : A_{ij} \geq B_{ij}$,
8. $\forall i, j : A_{ij} \geq B_{ij} \Rightarrow A \succcurlyeq B$.