

4 Shodná zobrazení v prostoru

Úloha 4.1. (Z) Vypočtěte součin $q_1 q_2$ jednak přímo z definice a druhak geometricky pomocí formule s vektorovým a skalárním součinem. Rovněž k těmto kvaternionům nalezněte kvaterniony inverzní.

$$\begin{aligned}q_1 &= 2 + \mathbf{i} - 3\mathbf{k} \\q_2 &= 1 + 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}\end{aligned}$$

Úloha 4.2. (Z) Nalezněte otočení vektoru $(0, 0, 1)^T$ kolem vektoru $(1, 2, 2)^T$ o úhel $\frac{2\pi}{3}$ v kladném směru. Pokuste se úlohu vyřešit jak pomocí Rodriguesovy formule tak pomocí kvaternionů.

Úloha 4.3. Nalezněte všechny jednotkové kvaterniony, které odpovídají rotaci, která převádí vektor $(1, 0, 0)^T$ na vektor $(0, 1, 0)^T$.

Úloha 4.4. (Z) Vyjádřete středovou souměrnost v $\mathbb{R}^3$ se středem $(1, 2, 3)^T$. Jedná se o přímou nebo nepřímou shodnost?

Úloha 4.5. (Z) Nalezněte vyjádření rovinové souměrnosti v $\mathbb{R}^3$, která zobrazuje bod $(1, 0, -2)^T$ na bod $(3, 2, 0)^T$.

Úloha 4.6. (Z) Nalezněte vyjádření osové souměrnosti v prostoru podle přímky s parametrickým vyjádřením $(1, 0, -1)^T + t(1, 2, 3)^T$. Jedná se o přímou nebo nepřímou shodnost?

Úloha 4.7. Ověřte, že rovnice

$$\begin{aligned}x' &= \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + 1, \\y' &= \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + 2, \\z' &= \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 3,\end{aligned}$$

popisují přímou shodnost $\mathbb{R}^3$. Najděte samodružnou přímku tohoto zobrazení a vyjádřete je jako složení otočení kolem této přímky a posunutí v jejím směru (tedy jako šroubový pohyb). Jaká je velikost úhlu otočení a vektoru posunutí?

Řešení cvičení 4

4.1 Roznásobení podle definice:

$$q_1 q_2 = (2 + \mathbf{i} - 3\mathbf{k})(1 + 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) = 2 + 8\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 10\mathbf{k} + \mathbf{i} + 4\mathbf{i}^2 + 2\mathbf{i}\mathbf{j} - 5\mathbf{i}\mathbf{k} - 3\mathbf{k} - 12\mathbf{k}\mathbf{i} - 6\mathbf{k}\mathbf{j} + 15\mathbf{k}^2 = \\ = 2 + 9\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 13\mathbf{k} - 4 + 2\mathbf{k} + 5\mathbf{j} - 12\mathbf{j} + 6\mathbf{i} - 15 = -17 + 15\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$$

Výpočet geometricky pomocí formule se skalárním a vektorovým součinem

$$q_1 q_2 = (s_1 s_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 + s_1 \mathbf{v}_2 + s_2 \mathbf{v}_1).$$

V našem případě $q_1 = (s_1, \mathbf{v}_1) = (2, (1, 0, -3)^T)$, $q_2 = (s_2, \mathbf{v}_2) = (1, (4, 2, -5)^T)$, a tedy

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 19, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (6, -7, 2)^T,$$

čímž získáme

$$q_1 q_2 = (2 \cdot 1 - 19, (6, -7, 2)^T + 2 \cdot (4, 2, -5)^T + 1 \cdot (1, 0, -3)^T) = (-17, (15, -3, -11)^T).$$

4.2 Pomocí Rodriguesovy formule:

ϕ je úhel otočení, r je vektor, který otáčíme, a $n = \frac{1}{3}(1, 2, 2)^T$ je osa rotace (normovaná).
Obraz r' vektoru r tedy spočteme následovně

$$r' = \left(1 - \cos \frac{2\pi}{3}\right) \left((0, 0, 1)^T \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^T \right) \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^T + \\ + \cos \frac{2\pi}{3} (0, 0, 1)^T + \sin \frac{2\pi}{3} \left(\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^T \times (0, 0, 1)^T \right).$$

$$\text{Takže } r' = \frac{1}{6} (2 + 2\sqrt{3}, 4 - \sqrt{3}, 1)^T.$$

Pomocí kvaternionů:

α je polovina úhlu otočení, tzn. $\alpha = \frac{\pi}{3}$ a

$$q = \left(\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)^T \right).$$

V algebraickém tvaru $q = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\mathbf{i} + \frac{2\sqrt{3}}{6}\mathbf{j} + \frac{2\sqrt{3}}{6}\mathbf{k}$. Obdobně provedeme zápis r vektoru, který otáčíme, pomocí kvaternionů: $r = \mathbf{k}$.

Potom

$$\begin{aligned} R_q(\mathbf{r}) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\mathbf{i} + \frac{2\sqrt{3}}{6}\mathbf{j} + \frac{2\sqrt{3}}{6}\mathbf{k} \right) \mathbf{k} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\mathbf{i} - \frac{2\sqrt{3}}{6}\mathbf{j} - \frac{2\sqrt{3}}{6}\mathbf{k} \right) = \\ &= \frac{2+2\sqrt{3}}{6}\mathbf{i} + \frac{4-\sqrt{3}}{6}\mathbf{j} + \frac{1}{6}\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Takže $r' = \frac{1}{6} (2+2\sqrt{3}, 4-\sqrt{3}, 1)^T$.

4.3 Máme najít všechny rotace převádějící $\mathbf{i}$ na $\mathbf{j}$, tedy všechny jednotkové kvaterniony splňující

$$q\mathbf{i}\bar{q} = \mathbf{j}.$$

Je dobré si nejprve geometricky rozmyslet, že takových rotací je nekonečně mnoho a ta s nejmenším možným rotačním úhlem $\pi/2$ je realizována pomocí jednotkového kvaternionu

$$q_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k}$$

a s zatímco ta s největším rotačním úhlem π pomocí

$$q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}.$$

Nejlepší způsob jak nalézt všechny tyto rotace je nejprve studovat takové rotace, které fixují vektor $\mathbf{i}$, tedy právě rotace, které mají $\mathbf{i}$ za osu a ty všechny odpovídají kvaternionům

$$q_\alpha = (\cos \alpha) + (\sin \alpha)\mathbf{i}.$$

Z grupové struktury $\mathbb{H}_1$ pak vidíme, že všechny kvaterniony splňující zadání úlohy jsou právě kvaterniony tvaru

$$q_1 q_\alpha = (\cos \alpha) q_1 + (\sin \alpha) q_2$$

a tvoří hlavní kružnici na $\mathbb{H}_1 \simeq \mathbb{S}^3$.

4.4 Zobrazení lze získat složením posunutí $(1, 2, 3)^T$ do počátku, středové souměrnosti podle počátku a posunutím zpět do zadaného středu:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left(\mathbf{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Determinant matice je roven -1 , jedná se tedy o nepřímou shodnost.

4.5

Uvažme bázi $\mathcal{B} = (n, v_1, v_2)$, kde n je normálový vektor roviny souměrnosti s vlastním číslem -1 a vektory v_1, v_2 jsou libovolné lineárně nezávislé vektory této roviny s vlastním číslem 1 . Např.

$$n = (1, 1, 1)^T, v_1 = (0, 1, -1)^T, v_2 = (-1, 0, 1)^T.$$

Pak pro matici zobrazení musí platit

$$[A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vyjádření této matice v kanonické bázi pak získáme jako

$$[A]_{\mathcal{K}}^{\mathcal{K}} = [\text{id}]_{\mathcal{K}}^{\mathcal{B}} [A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} [\text{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{K}}.$$

Posunutí $\mathbf{p}$ určíme ze zadaného vzoru a obrazu. To musí splňovat

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rovinová souměrnost je tedy nepřímá shodnost s předpisem

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Úlohu lze alternativě řešit podobnými úvahami jako v úloze 4.6.

4.6 Úlohu vyřešíme více-méně středoškolským způsobem. Zadanou přímku označme o . Bodem $\mathbf{X} = (x, y, z)^T$ povedeme přímku p , $p \perp o$. Na té zřejmě bude ležet jeho obraz $\mathbf{X}'$. Nechť $p \cap o = \mathbf{P}$. Protože $\mathbf{P} \in o$, můžeme psát

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Navíc je $\mathbf{P}$ ortogonální projekcí bodu X na přímku p . Z toho plyne

$$t_0 = \frac{x + 2y + 3z + 2}{14}.$$

Z výše uvedeného vyplývá, že $P = \frac{X + X'}{2}$, a tedy $X' = 2P - X$. Po souřadnicích

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1 + t_0) + x \\ 2(0 + 2t_0) + y \\ 2(-1 + 3t_0) + z \end{pmatrix}.$$

Po dosazení a upravení získáme

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{16}{7} \\ \frac{4}{7} \\ -\frac{8}{7} \end{pmatrix}.$$

Zadaná shodnost je přímá ($\det(A) = 1$).

Úlohu by šlo podobně jako v úloze 4.5 vyřešit nalezením matice vzhledem k vhodné bázi.

4.7

Shodnost je přímá ($\det A = 1$) a tedy z přednášky víme, že ji lze vyjádřit jako šroubový pohyb, tedy jako rotaci kolem nějaké přímky složenou s posunutím ve smětu této přímky. Ve zvláštních případech může být rotace nulová (pak jde o posunutí) nebo může být posunutí nulové (pak jde o čisto rotaci kolem přímky).

Směr samodružné přímky je nutně vlastní vektor matice A s vlastním číslem 1, který snadno určíme jako

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Body samodružné přímky splňují vlastnost, že $f(\mathbf{Q}) - \mathbf{Q}$ je LZ s vektorem u , což můžeme vyjádřit jako soustavu dvou rovnic o třech neznámých

$$(f(\mathbf{Q}) - \mathbf{Q}) \cdot (0, 1, 0)^T = (f(\mathbf{Q}) - \mathbf{Q}) \cdot (1, 0, -1)^T = 0.$$

Partikulárním řešením je například

$$\mathbf{Q}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

a tedy samodružná přímka ℓ má tedy parametrické vyjádření

$$\mathbf{Q}_0 + \text{LO}\{u\} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} + \text{LO} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Úhel rotace lze určit jako úhel mezi některým vektorem kolmým na osu a jeho obrazem, tedy například jako úhel mezi $(0, 1, 0)^T$ a $A \cdot (0, 1, 0)^T$ a posunutí lze určit jako $f(\mathbf{Q}_0) - \mathbf{Q}_0$. Méně elementární pohled je následující: $\cos \varphi = \frac{\text{tr}(A)-1}{2} = -\frac{1}{3}$ a posunutí $(up)u = (2, 0, 2)^T$.

Výsledná shodnost je tedy šroubový pohyb, totiž rotace o $\varphi = \arccos(-\frac{1}{3})$ kolem osy ℓ složená s posunutím o vektor $(2, 0, 2)^T$.

