

3 Shodná zobrazení v rovině

Úloha 3.1. (Z) Pro následující zobrazení z $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ rozhodněte, zda se jedná o shodnost. Jestliže ano, určete její typ, nalezněte její samodružné prvky (body, směry, přímky) a inverzní zobrazení. Složte některá zobrazení mezi sebou.

a) $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 1, y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2$

b) $x' = -\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y + 20, y' = \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 4$

c) $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1, y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 2$

d) $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1, y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y$

e) $x' = -x + 1, y' = -y + 2$

f) $x' = x + 3, y' = -y$

Úloha 3.2. (Z) Pomocí zobrazení z úlohy 3.1, a) zobrazte

a) bod $(2, -3)^T$

b) přímku $(1, 1)^T + t(1, 2)^T$

c) přímku $x + y - 3 = 0$

d) parabolu $y - x^2 = 0$

Úloha 3.3. (Z) Nalezněte rovnici otočení v rovině se středem $(1, 3)^T$ o úhel α .

Úloha 3.4. (Z) Napište rovnici shodnosti, která vznikne složením osových souměrností po řadě s osami: $o_1 : 2x + 3y + 4 = 0$ a $o_2 : x - y - 3 = 0$ a určete typ shodnosti.

Úloha 3.5. (Z) Napište rovnici shodnosti, která vznikne složením osových souměrností po řadě s osami: $o_1 : 2x + 3y + 4 = 0$ a $o_2 : 2x + 3y = 0$ a určete typ shodnosti.

Úloha 3.6. (Z) Popište všechny shodnosti v rovině, které zobrazí bod $\mathbf{X} = (2, 5)^T$ na bod $\mathbf{X}' = (-6, 3)^T$.

Úloha 3.7. (Z) Nalezněte všechny shodnosti v $\mathbb{R}^2$, pro které je přímka $3x + 4y - 1 = 0$ samodružná a zároveň její bod $(3, -2)^T$ je samodružný.

Úloha 3.8. Určete reálné parametry p, q tak, aby existovala shodnost f v $\mathbb{R}^2$ taková, že $f : (3, 0)^T \mapsto (1, 4)^T$, $f : (1, 2)^T \mapsto (3, p)^T$, $f : (-1, 2)^T \mapsto (1 + p, -q)^T$. Tuto shodnost analyzujte.

Úloha 3.9. Nalezněte všechny shodnosti, které zachovávají čtverec s vrcholy $(0, 0)^T$, $(1, -1)^T$, $(2, 0)^T$ a $(1, 1)^T$. Popište grupu, kterou tvoří.

Úloha 3.10. Konstrukčně i početně nalezněte všechny pětiúhelníky (ne nutně konvexní), jestliže jsou zadány (popořadě) středy jeho stran $S_1 = (3, -2)^T$, $S_2 = (6, 0)^T$, $S_3 = (3, 2)^T$, $S_4 = (-2, 1)^T$, $S_5 = (-1, -2)^T$.

Úloha 3.11. Nalezněte shodnost v rovině, která zobrazí kuželosečku s implicitní rovnicí $20x - 9x^2 - 15y - 24xy - 16y^2 = 0$ na kuželosečku, která nemá smíšený člen xy . Rozhodněte, o jakou kuželosečku se jedná.

Úloha 3.12. Nalezněte shodnost v rovině, kterou lze složit ze tří osových souměrností, ale ne z menšího počtu. Dokažte!

Výsledky

Cvičení 3

3.1 Zapište zobrazení maticově jako $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$ a rozhodněte, zda $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_2$. Pro samodružné body je třeba řešit soustavu $\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$. Samodružné směry jsou vlastní podprostory matice $\mathbf{A}$. Samodružná přímka nemusí být tvořena samodružnými body, ale její směr samodružný být musí. Její libovolný bod najdeme tak, že jej zobrazení posune o vektor, který je v samodružném směru zobrazení. Inverz a skládání viz vzorečky v seznamu vět z přednášky.

- a) otočení se středem v bodě $(-\frac{3}{2}, -2)^T$, žádné samodružné směry, inverzní zobrazení $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{11}{5}$, $y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{2}{5}$
- b) Zobrazení lze chápat jako složení osové souměrnosti podle přímky procházející počátkem a posunutí ve směru na ni kolmém (je třeba početně ověřit). Je to tedy osová souměrnost podle přímky neprocházející počátkem. Samodružná přímka $-5x + y + 52 = 0$ je osou symetrie, samodružné jsou i všechny kolmice na ni, samodružné směry jsou generovány vektory $(1, 5)^T$, $(5, -1)^T$, inverzní zobrazení je $x' = -\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y + 20$, $y' = \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 4$.
- c) není shodné, protože matice není ortogonální.
- d) otočení, samodružný bod $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}})^T$, žádné samodružné směry, inverzní zobrazení $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}$
- e) středová souměrnost, samodružný bod $(\frac{1}{2}, 1)^T$, všechny směry samodružné s vlastním číslem -1 , inverzní zobrazení $x' = -x + 1$, $y' = -y + 2$.
- f) Jde o složení osové souměrnosti podle osy x a posunutí ve směru, který na ni není kolmý (dokonce přímo ve směru osy), je to tedy posunutá osová souměrnost. Žádný samodružný bod není, samodružné směry jsou generovány vektory $(1, 0)^T$, $(0, 1)^T$, samodružnou přímkou je x -ová souřadná osa (i když žádný její bod samodružný není). Inverzní zobrazení je $x' = x - 3$, $y' = -y$.

3.2

- a) $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ -27 \end{pmatrix}$.
- b) Přímku v parametrickém tvaru lze zobrazit přímým dosazením (jakoby po bodech). Alternativně můžeme shodností zobrazit jeden její bod a následně zobrazit vektor jejího zaměření asociovaným homomorfismem:

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 12 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Zaměření obrazu je tedy $\text{LO} \left\{ \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ a obraz přímky je $(\frac{12}{5}, -\frac{11}{5})^T + t(11, 2)^T$.

- c) Přímku by šlo převést do parametrického tvaru, zobrazit a následně zapsat rovnicově. Zobrazení ji však rovnou. Obecně pro křivku zadanou rovnicí je třeba vyjádřit z výrazu $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$ předpis pro $\mathbf{X} = (x, y)^T$ a tedy využít inverzní zobrazení:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p} \iff \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{X}' - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p},$$

přehledněji se zápisem pomocí souřadnic:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}.$$

Pro naše konkrétní zobrazení máme (používáme již nalezené inverzní zobrazení):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3x' - 4y' - 11 \\ 4x' + 3y' + 2 \end{pmatrix}.$$

Tím jsme dospěli k vyjádření vztahu mezi $(x, y)^T$ a $(x', y')^T$, teď už jen dosadíme do rovnice přímky:

$$\frac{1}{5}(3x' - 4y' - 11) + \frac{1}{5}(4x' + 3y' + 2) - 3 = 0$$

$$7x' - y' - 24 = 0.$$

(Kromě sečtení jsme ještě rovnici vynásobili 5).

- d) Obdobně jako v předchozím případě dosadíme souřadnice "obrazů":

$$\frac{1}{5}(4x' + 3y' + 2) - \left(\frac{1}{5}(3x' - 4y' - 11) \right)^2 = 0.$$

Po úpravě: $9x'^2 - 24x'y' + 16y'^2 - 86x' + 73y' + 111 = 0$.

3.3 Složíme posunutí středu do počátku, otočení o α kolem počátku a posunutí zpět do bodu $(1, 3)^T$. To je zřejmě otočení o daný úhel se samodružným bodem $(1, 3)^T$, takže se jedná o hledané zobrazení.

Posunutí do počátku: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Otočení o α kolem počátku: $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \mathbf{X}$

Posunutí zpět: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Složení:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Alternativně jsme mohli postupovat použitím vlastností otočení. Úhel máme zadáný, takže známe tvar matice asociovaného homomorfismu. Pro nalezení vektoru posunutí využijeme toho, že $(1, 3)^T$ má být samodružný. Jinými slovy musí být splněna podmínka

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Oba postupy vedou na stejný výpočet a otočení je tvaru:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1 - \cos \alpha + 3 \sin \alpha \\ 3 - 3 \cos \alpha - \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

Rovnicí: $x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha - \cos \alpha + 3 \sin \alpha + 1$, $y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha - \sin \alpha - 3 \cos \alpha + 3$.

3.4 Pro řešení této a následující úlohy se hodí vzorec pro osovou souměrnost podle přímky s obecnou rovnicí $ax + by + c = 0$:

$$\mathbf{X}' = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} b^2 - a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \frac{-2c}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Ten se dá odvodit z podmínky, že normálový vektor přímky je vlastním vektorem matice s vlastním číslem -1 a směrový vektor s vlastním číslem $+1$, tedy matice splňuje rovnost

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Tato rovnost také souvisí se změnou báze: definujeme-li bázi $\mathcal{B} = ((a, b)^T, (-b, a)^T)$, pak jistě platí $[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Jak víme z LA, v kanonické bázi má potom matice tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= [\text{id}]_{\mathcal{K}}^{\mathcal{B}} [\mathbf{A}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} [\text{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{K}} = [\text{id}]_{\mathcal{K}}^{\mathcal{B}} [\mathbf{A}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} ([\text{id}]_{\mathcal{K}}^{\mathcal{B}})^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} b^2 - a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Po vyřešení maticové rovnice se pak dá vzít libovolný bod $\mathbf{X}_0$ ležící na přímce, a z podmínky $\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}_0 + \mathbf{p}$ dopočíst $\mathbf{p}$. Zvolme BÚNO $\mathbf{X}_0 = (-\frac{c}{a}, 0)^T$. Pak

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} b^2 - a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} -2ac \\ -2bc \end{pmatrix}.$$

Využitím vzorečku je osová souměrnost podle o_1 : $\frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ -12 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{X} - \frac{8}{13} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ a osová souměrnost podle o_2 : $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$. Složení má podle vzorečku z přednášky tvar:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ -12 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \frac{8}{13} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{13} \begin{pmatrix} -12 & -5 \\ 5 & -12 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 15 \\ -55 \end{pmatrix}.$$

Rovnicově: $x' = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 15)$, $y' = \frac{1}{13}(5x - 12y - 55)$.

Složením dvou takto získaných nepřímých shodností vznikne přímá shodnost, osy jsou různoběžné, půjde tedy o otočení. To lze ověřit i vyšetřením vlastností nalezeného afinního zobrazení (samodružné prvky, determinant).

3.5 Souměrnost podle o_1 jsme našli už v 3.4. o_2 prochází počátkem, jedná se tedy o lineární zobrazení. Jeho matici navíc nemusíme počítat, protože je tato přímka rovnoběžná s o_1 . Souměrnost podle o_2 má tedy tvar $\frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ -12 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{X}$. Složení je potom tvaru:

$$\frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ -12 & -5 \end{pmatrix} \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ -12 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ -12 & -5 \end{pmatrix} \frac{8}{13} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \frac{8}{13} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Rovnicově: $x' = x + \frac{16}{13}$, $y' = y + \frac{24}{13}$. Opět půjde o přímou shodnost, osy jsou rovnoběžné, půjde tedy o posunutí.

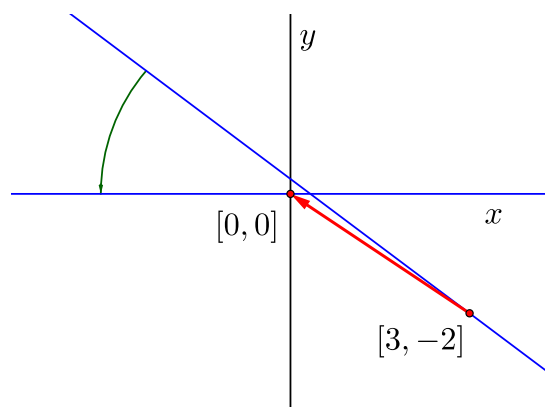
3.6 Úlohu můžeme řešit přímočaře tak, že rozlišíme dva případy, totiž když je shodnost přímá nebo nepřímá. V obou případech víme jak vypadá obecně matice $\mathbf{A}$ a příslušné posunutí $\mathbf{p}$ dopočítáme tak, aby $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}'$.

Také lze využít grupy všech zobrazení, která mají počátek $[0, 0]$ jako samodružný bod, a tedy mají nulové posunutí, označme si tuto grupu jako G_0 . Jestliže f je posunutí o vektor $(-2, -5)^T$ a f' je posunutí o vektor $(-6, 3)^T$, pak řešením úlohy jsou právě zobrazení tvaru $f' \circ g \circ f$, kde $g \in G_0$ (dokažte).

$$\text{Přímé shodnosti: } \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \sin \alpha - 2 \cos \alpha - 6 \\ -2 \sin \alpha - 5 \cos \alpha + 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{nepřímé shodnosti: } \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \sin \alpha - 2 \cos \alpha - 6 \\ -2 \sin \alpha + 5 \cos \alpha + 3 \end{pmatrix}.$$

3.7 Použijeme analogický přístup jako v druhé části příkladu 3.6. Najdeme shodnost f , která zobrazí bod $(3, -2)^T$ na bod $(0, 0)^T$ a přímku ze zadání na přímku $y = 0$. Následně vyřešíme úlohu pro přímku $y = 0$ a samodružný bod $(0, 0)^T$. Nakonec vše vrátíme zpět inverzním zobrazením. Složením těchto tří zobrazení dostaneme chtěné shodnosti.



Hledáme složení otočení a posunutí, které zobrazí zadanou přímku na přímku $y = 0$. Takové otočení zobrazí normálový vektor $(4, -3)^T$ zadané přímky na vektor $(0, 5)^T$. Otočení má tudíž příslušnou matici

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Původní posunutí přímky mělo vektor $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Otočení musíme na tento vektor také aplikovat, a dostaneme výsledné afinní zobrazení f :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{18}{5} \end{pmatrix}.$$

Dopočítáme nyní inverzní zobrazení f^{-1} invertováním tohoto. To jde provést snadno díky typům skládaných zobrazení, ale raději obecně připomínáme, že pokud $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{p}$, pak $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}' - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}$. Dostaneme:

$$f^{-1}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Shodnosti g , které mají samodružnou osu x a bod $(0, 0)^T$, mají ortonormální matice a nulový vektor $\mathbf{p}$. Navíc první sloupec musí být vektor $(1, 0)^T$ nebo $(-1, 0)^T$. Takovým zobrazením odpovídají pouze 4 matice (tvořící grupu):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Složením zobrazení v pořadí $f^{-1} \circ g \circ f$ pak dostaneme hledané shodnosti:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{7}{25} & -\frac{24}{25} \\ -\frac{24}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{25} \\ \frac{8}{25} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{7}{25} & \frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{144}{25} \\ -\frac{108}{25} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

3.8 Aby f byla shodnost, musí platit $\|X - Y\| = \|f(X) - f(Y)\|$. Vyřešte rovnice pro p, q .

Jedna z možností je určit p, q ze vzdáleností vybraných bodů. Druhou možností je i s parametry zobrazení ve tvaru $\mathbf{AX} + \mathbf{p}$. Sestavíme soustavu rovnic a vyjde nám, že

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2-p}{2} & \frac{4-p}{2} \\ \frac{p+q}{2} & \frac{2p+q-4}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-4+3p}{2} \\ \frac{8-3p-3q}{2} \end{pmatrix}$$

První řádek matice má normu 1 pro $p = 2$ nebo $p = 4$. Norma prvního sloupce pak bude 0 pro $q = 0$ resp. $q = -4$. Pouze první volba dává ortogonální matici, zobrazení pak je

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

To je posunutá osová souměrnost s osou $-x + y = 0$ a posunutím o vektor $(1, 1)^T$.

3.9 Grupa D_8 , identita, otočení se středem v bodě $(1, 0)^T$ o $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, osové symetrie s osami $y = 0, x - 1 = 0, -x + y + 1 = 0$ a $x + y - 1 = 0$.

$$\text{otočení o } \frac{\pi}{2}: \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{otočení o } \pi: \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

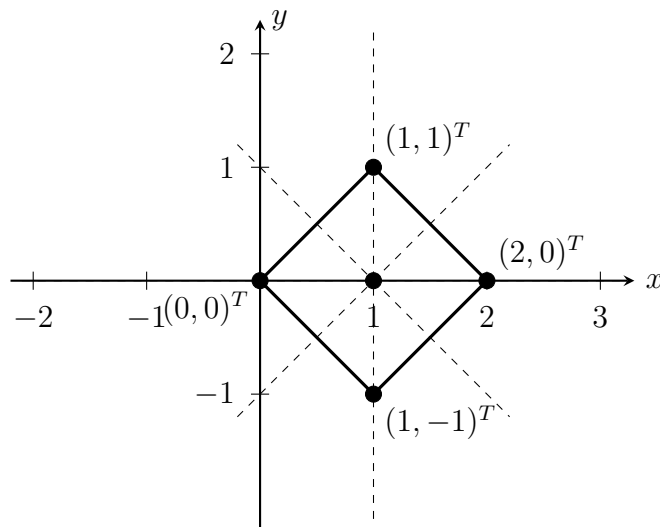
$$\text{otočení o } \frac{3\pi}{2}: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{osová souměrnost s osou } y = 0: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\text{osová souměrnost s osou o } x - 1 = 0: \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{osová souměrnost s osou o } -x + y + 1 = 0: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{osová souměrnost s osou o } x + y - 1 = 0: \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



3.10 První vrchol pětiúhelníku dostaneme jako samodružný bod zobrazení složeného z pěti středových souměrností se středy S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 . Druhý vrchol získáme jako obraz prvního ve středové symetrii se středem S_1 atd.

Také je možné zapsat středy jako $S_1 = \frac{1}{2}(A_1 + A_2)$, $S_2 = \frac{1}{2}(A_2 + A_3)$ atd. a vyřešit příslušnou soustavu rovnic, tj. $A_1 = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + S_5$ atd. Vyjde $A_1 = (1, -3)^T$, $A_2 = (5, -1)^T$, $A_3 = (7, 1)^T$, $A_4 = (-1, 3)^T$, $A_5 = (-3, -1)^T$.

3.11 Stačí uvažovat přímou shodnost tvaru $X' = AX + p$. Zobraďte kuželosečku pomocí tohoto zobrazení. Výsledná kuželosečka má koeficient 0 u smíšeného členu xy a navíc ji toto zobrazení může posunout tak, aby procházela počátkem, a tedy měla nulový i absolutní člen.

Zobrazení

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

převeďte rovnici na tvar $-y' - x'^2 = 0$. Je to tedy parabola, která vznikne z paraboly $y = -x^2$ otočením se středem v počátku o $\arctan(\frac{4}{3})$.

3.12 Složením tří (lichého počtu) osových souměrností vznikne vždy nepřímá shodnost. Nepřímé shodnosti jsou buď samy osové souměrnosti nebo posunuté osové souměrnosti.

Posunutá osová souměrnost je nepřímá shodnost, musí být tedy složena z jedné nebo tří osových souměrností a jedna to jistě není, protože nemá samodružné body.