

2 Barycentrické souřadnice a afinní zobrazení

Úloha 2.1. (Z) Mějme afinní prostor $\mathbb{R}^2$ nad tělesem $\mathbb{R}$ s vektorovým prostorem $\mathbb{R}^2$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- (a) Spočítejte afinní kombinaci bodů $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$,
- (b) rozhodněte, zda je bod $\mathbf{B}$ afinní kombinací bodů $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ a pokud ano, spočítejte ji,
- (c) ověřte, že je posloupnost $B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ barycentrická soustava souřadnic a určete barycentrické souřadnice $[\mathbf{B}]_B$ a $\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_B$ (je to bod z B!).
- (d) rozhodněte, zda body $\mathbf{B}$ a $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ leží uvnitř trojúhelníka s vrcholy B ,
- (e) spočítejte těžiště trojúhelníku B .

Úloha 2.2. (Z) Určete rovnice afinního zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do sebe, ve kterém bod $\mathbf{M} = (0, 1)^T$ přechází do bodu $\mathbf{M}' = (-3, 3)^T$ a asociovaný homomorfismus zobrazuje vektory $\mathbf{u} = (1, 2)^T$ a $\mathbf{v} = (1, 0)^T$ po řadě na vektory $\mathbf{u}' = (-7, -2)^T$, $\mathbf{v}' = (1, -2)^T$.

Úloha 2.3. (Z) Určete afinní zobrazení f z $\mathbb{R}^2$ do sebe tak, že následující body zobrazí :

$$f((-1, 1)^T) = (6, 7)^T, \quad f((1, -1)^T) = (4, 5)^T, \quad f((2, 0)^T) = (7, 12)^T.$$

Určete zda-li se jedná o afinitu a případně nalezněte zobrazení inverzní. Nalezněte (pokud existují) samodružné body, směry a přímky zobrazení f .

Úloha 2.4. (Z) Při afinním zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zadaném obrazy bodů a jejich vzory: $f((2, 1, -1)^T) = (1, 3)^T$, $f((1, 0, 2)^T) = (0, 2)^T$, $f((0, 1, 1)^T) = (1, -1)^T$, $f((1, 1, 1)^T) = (1, 1)^T$ určete obraz bodu $(3, 1, -2)^T \in \mathbb{R}^3$ a obraz vektoru $(3, 1, -2)^T$ při asociovaném homomorfismu $\bar{f}$.

Úloha 2.5. Lineární zobrazení $\bar{f}$ asociované s afinním zobrazením $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ má vzhledem k bázi B matici A . Navíc platí $f((1, 2)^T) = (5, -8)^T$. Určete $f((3, 4)^T)$.

$$B = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right), A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Úloha 2.6. (Z) V $\mathbb{R}^2$ je dán trojúhelník ABC s vrcholy $\mathbf{A} = (2, 0)^T$, $\mathbf{B} = (-3, 0)^T$ a $\mathbf{C} = (3, -3)^T$. Ukažte, že body $\mathbf{P} = (-1, -1)^T$, $\mathbf{Q} = (1, 3)^T$, a $\mathbf{R} = (-\frac{1}{2}, 0)^T$ leží postupně na přímkách $\mathbf{BC}$, $\mathbf{CA}$ a $\mathbf{AB}$ a určete v jakém poměru je rozdělují (vypočtete dělicí poměry). Rozhodněte, zda body $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ leží na přímce. Vypočtete poměr obsahu trojúhelníků ABC a ARP .

Úloha 2.7. Vyjádřete kolmou projekci π celého $\mathbb{R}^2$ na přímku $x + 2y + 3 = 0$, určete samodružné body, směry (včetně vlastních čísel) a přímky tohoto zobrazení a ověřte, že $\pi \circ \pi = \text{id}$.

Úloha 2.8. 2.9 U následujících afinních zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ ověřte, že se jedná o osovou afinitu. Dále určete její osu, směr a charakteristiku. Rozhodněte, zda se jedná o elaci.

$$(a) f(\mathbf{X}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$(b) f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Úloha 2.9. Na reálné afinní přímce jsou dva různé body A , B . Definujme $S = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ a $T = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$. Vyjádřete dělicí poměry $\frac{AT}{TB}$, $\frac{TA}{AB}$, $\frac{ST}{TB}$. Vyjádřete bod S jako afinní kombinaci bodů A a T .

Úloha 2.10. (Van Aubelova věta) V $\mathbb{R}^2$ je nějaký trojúhelník $\mathbf{ABC}$ a bod $\mathbf{X}$, který neleží na žádné ze stran trojúhelníka (ani po prodloužení do přímek). Označme si $\mathbf{P} = \mathbf{AX} \cap \mathbf{BC}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{BX} \cap \mathbf{CA}$ a $\mathbf{R} = \mathbf{CX} \cap \mathbf{AB}$. Dokažte, že platí

$$\frac{\mathbf{AX}}{\mathbf{XP}} = \frac{\mathbf{AR}}{\mathbf{RB}} + \frac{\mathbf{AQ}}{\mathbf{QC}}.$$

Výsledky

2.1 Řešení. (a) Přímočaře spočítáme kombinaci

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(b) Ptáme se, zda existují hodnoty x a y , pro které

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (1 - x - y) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

tedy řešíme vektorovou rovnici

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 3-2 \\ 2-1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3-2 \\ 1-1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Počítáme soustavu rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

jejíž řešení $x = 1$, $y = -3$ jsme spočítali v úloze z Cvičení 1(b). Našli jsme afinní kombinaci

$$\mathbf{B} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Posloupnost B obsahuje 3 body. Zbývá proto ověřit, že každý bod afinního prostoru dostaneme (jednoznačně) jako afinní kombinaci bodů posloupnosti B , což je (dle tvrzení z přednášky) ekvivalentní tomu, že je posloupnost vektorů

$$\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

lineárně nezávislá. To zřejmě platí, navíc jsme to ověřili už v úloze z Cvičení 1.

Barycentrické souřadnice $(3, 1, -3)^T$ bodu $\mathbf{B}$ jsme určili v úloze (b) a barycentrické souřadnice $(0, 1, 0)^T$ jednoho z bodů $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ barycentrické souřadné soustavy B určíme bez počítání.

(d) Protože bod leží v trojúhelníku určeném body barycentrické souřadné soustavy B , právě když všechny jeho barycentrické souřadnice vzhledem k B leží v intervalu $(0, 1)$, stačí nám tyto souřadnice zjistit. Pro bod $\mathbf{B}$ už je máme určeny v (c), tudíž vidíme, že $\mathbf{B}$ v trojúhelníku neleží.

Nyní podobně jako v (b) vyřešíme soustavu

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \frac{5}{2} - 2 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} - 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \end{array} \right),$$

odkud vidíme, že barycentrické souřadnice bodu $\mathbf{C}$ jsou $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})^T$, z čehož plyne, že bod $\mathbf{C}$ leží uvnitř trojúhelníku B .

(e) Protože nalezení těžiště není ničím jiným než výpočtem afinní kombinace se všemi koeficienty stejnými, máme

$$t_B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

2.2 Rovnice afinního zobrazení má tvar $f(\mathbf{X}) = A\mathbf{X} + \mathbf{p}$. Nalezení matice A je elementární úloha z lineární algebry (matice zobrazení, když jsou zadány obrazy nějaké báze).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}' = A \cdot \mathbf{M} + \mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{M}' - A \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Matrici A a vektor $\mathbf{p}$ jsme našli. Řešení můžeme zapsat:

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

případně:

$$\begin{aligned} x' &= x - 4y + 1 \\ y' &= -2x + 3 \end{aligned}$$

Podrobnější elementární řešení: Pokud $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, pak:

$$A \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}' \Rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a + 2b &= -7 \\ c + 2d &= -2 \end{aligned}$$

$$A \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}' \Rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a &= 1 \\ c &= -2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2b = -8 \Rightarrow b = -4; d = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}' = A \cdot \mathbf{M} + \mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{M}' - A \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2.3

Asociovaný homomorfismus $\bar{f}$ zobrazí rozdílové vektory následovně:

$$\bar{f} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \bar{f} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{f}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \bar{f}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Jeho matici $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ lze nalézt podobně jako v úloze 2.2.

Vektor posunutí nalezneme např. použitím obrazu bodu $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ obdobně jako v 2.2:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Afinní zobrazení tedy má tvar $f(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Matice asociovaného homomorfismu je regulární, takže se jedná o afinitu. Inverzní matici nalezneme pomocí prostředků LA: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Z přednášky dále víme, že inverzní zobrazení má tvar $f^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{X} + (-\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix}$.

Samodružné body splňují $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, což odpovídá vztahu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

K jejich nalezení je tedy třeba vyřešit soustavu $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & -5 \\ 3 & 3 & -6 \end{array}\right)$. Ta má jediné řešení $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$, což je jediný samodružný bod zobrazení f .

Samodružné směry f odpovídají vlastním vektorům matice asociovaného homomorfismu. K jejich nalezení spočítáme vlastní čísla matice jako kořeny jejího charakteristického polynomu $\lambda^2 - 5\lambda - 2$. Těmi jsou $\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{33}}{2}$. Vlastní vektory najdeme použitím známého postupu z LA. Tyto vlastní vektory, potažmo samodružné směry f potom jsou $\begin{pmatrix} -3 + \sqrt{33} \\ 6 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} -3 - \sqrt{33} \\ 6 \end{pmatrix}$.

Samodružné přímky pak procházejí samodružným bodem a jejich zaměření je lineárním obalem jednoho ze samodružných směrů (byť ostatní body těchto přímek samodružné nejsou). Jedná se tedy o přímky $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} + \text{LO} \left\{ \begin{pmatrix} -3 - \sqrt{33} \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$ a $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} + \text{LO} \left\{ \begin{pmatrix} -3 + \sqrt{33} \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$.

2.4

1. Určení obrazu bodu a vektoru pomocí afinní kombinace bodů a lineární kombinace vektorů

Protože afinní zobrazení zachovává afinní kombinaci bodů, můžeme obraz bodu najít tímto způsobem. Vyjádříme si bod $\mathbf{X} = (3, 1, -2)^T$ pomocí ostatních bodů. Označíme body $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pak bod $\mathbf{X}$ můžeme zapsat jako:

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{B} + c_3\mathbf{C} + c_4\mathbf{D},$$

navíc ještě

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1.$$

Můžeme si c_1 vyjádřit jako $c_1 = 1 - c_2 - c_3 - c_4$, zbývá tedy vypočítat pouze 3 neznámé.

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= \mathbf{A} + c_2(\mathbf{B} - \mathbf{A}) + c_3(\mathbf{C} - \mathbf{A}) + c_4(\mathbf{D} - \mathbf{A}) \\ \mathbf{X} - \mathbf{A} &= c_2(\mathbf{B} - \mathbf{A}) + c_3(\mathbf{C} - \mathbf{A}) + c_4(\mathbf{D} - \mathbf{A}) \\ (1, 0, -1)^T &= c_2(-1, -1, 3)^T + c_3(-2, 0, 2)^T + c_4(-1, 0, 2)^T\end{aligned}$$

Z toho dostáváme 3 rovnice o 3 neznámých

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

Dopočítáme, že $c_2 = 0$, $c_3 = -\frac{1}{2}$, $c_4 = 0$ a nakonec $c_1 = 1 - (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}f(\mathbf{X}) &= \frac{3}{2}f(\mathbf{A}) - \frac{1}{2}f(\mathbf{C}) \\ \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}' \end{pmatrix} &= \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Obdobně vypočítáme i obraz vektoru $(3, 1, -2)^T$ jako lineární kombinaci vektorů.

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \alpha(\mathbf{B} - \mathbf{A}) + \beta(\mathbf{C} - \mathbf{A}) + \gamma(\mathbf{D} - \mathbf{A}) \\ (3, 1, -2)^T &= \alpha(-1, -1, 3)^T + \beta(-2, 0, 2)^T + \gamma(-1, 0, 2)^T\end{aligned}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

Pak $\alpha = -1, \beta = -\frac{5}{2}, \gamma = 3$ a tedy

$$f(\mathbf{v}) = -1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}'_1 \\ \mathbf{v}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. Určení obrazu bodu a vektoru pomocí sestavení matice zobrazení

Nejprve určíme obrazy tří vektorů pomocí zadaných bodů a jejich obrazů.

$$\bar{f}(\mathbf{v}_1) = \bar{f} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \bar{f} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{f}(\mathbf{v}_2) = \bar{f} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \bar{f} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{f}(\mathbf{v}_3) = \bar{f} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \bar{f} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Hledáme matici A asociovaného homomorfismu $\bar{f}$, která splňuje $AB = C$, kde matice B obsahuje ve sloupcích vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ a matice C má ve sloupcích jejich obrazy. Z toho tedy vidíme, že matici asociovaného homomorfismu A nalezneme jako $A = CB^{-1}$.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Protože platí $f(\mathbf{X}) = A\mathbf{X} + \mathbf{p}$ a $\bar{f}(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$, matice A je maticí homomorfismu f stejně tak jako maticí asociovaného homomorfismu $\bar{f}$. Dosazením libovolného bodu získáme vektor posunutí $\mathbf{p}$.

$$A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + p_1 \\ 3 + p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nakonec vypočítáme obraz bodu $(3, 1, -2)^T$ a vektoru $(3, 1, -2)^T$. Protože je vektor posunutí nulový, hodnoty pro obraz bodu a vektoru se budou shodovat.

$$\begin{aligned} f((3, 1, -2)^T) &= (1, 5)^T \\ \bar{f}((3, 1, -2)^T) &= (1, 5)^T \end{aligned}$$

2.5

Využijeme zadaného vzoru a obrazu:

$$f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \bar{f}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) + \mathbf{p} - \left(\bar{f}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + \mathbf{p}\right) = \bar{f}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \bar{f}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

pro nějaký vektor $\mathbf{p}$. Stačí naleznout obraz vektoru $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ při asociovaném homomorfismu, protože pak:

$$f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \bar{f}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

Pracujme v bázi B :

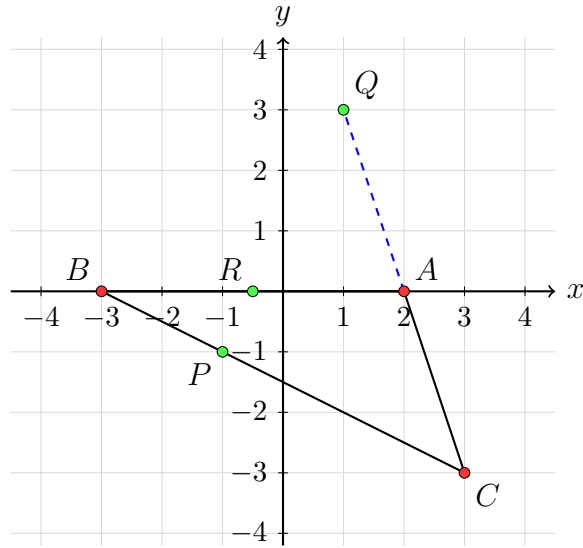
$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right]_B &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \left[\bar{f}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)\right]_B &= A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A tedy:

$$\bar{f}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = -4 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Z čehož podle vztahu výše plyne $f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -24 \end{pmatrix}$.

2.6



Počítejme postupně dělicí poměry pomocí barycentrické soustavy souřadnic $Z = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$. Barycentrické souřadnice bodů $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ nalezneme obdobně jako v 2.1. Pro bod $\mathbf{P}$ hledáme řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3-2 & 3-2 & -1-2 \\ 0-0 & -3-0 & -1-0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} -5 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \end{array} \right),$$

takže barycentrické souřadnice bodu $\mathbf{P}$ jsou $(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})^T$. Stejným způsobem najdeme barycentrické souřadnice $(2, 0, -1)^T$ bodu $\mathbf{Q}$ a $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)^T$ bodu $\mathbf{R}$.

Protože všechny body mají příslušnou souřadnici nulovou, leží na postupně zadaných přímkách. Ze souřadnic (kde soustavu souřadnic rozumíme bez bodu příslušejícímu nulové souřadnici) určíme dělicí poměry:

$$\frac{\mathbf{BP}}{\mathbf{PC}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}, \frac{\mathbf{CQ}}{\mathbf{QA}} = \frac{2}{-1} = -2, \frac{\mathbf{AR}}{\mathbf{RB}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

Navíc platí, že $\frac{\mathbf{BP}}{\mathbf{PC}} \cdot \frac{\mathbf{CQ}}{\mathbf{QA}} \cdot \frac{\mathbf{AR}}{\mathbf{RB}} = \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot 1 = -1$, takže body $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ leží na přímce díky Menelaově větě.

Pro výpočet poměrů obsahů využijeme vztahu $S_{ARP} = \det([A]_Z|[R]_Z|[P]_Z)S_{ABC}$. Poměr obsahů je tedy

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ARP}} = \frac{1}{\det([A]_Z|[R]_Z|[P]_Z)} = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}} = 6$$

Vektor $\mathbf{n} = (1, 2)^T$ je normálový vektor zadané přímky a proto $\mathbf{u} = (-2, 1)^T$ je její směrový vektor. Projekce kanonického vektoru $\mathbf{e}_1$ na vektor $\mathbf{u}$ má tedy (užitím vlastností skalárního součinu) tvar

$$\frac{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{5} \cdot (4, -2)^T$$

Analogicky projekce vektoru $\mathbf{e}_2$ na vektor $\mathbf{u}$ vyjde $\frac{1}{5} \cdot (-2, 1)^T$, proto matice asociovaného homomorfismu afinní projekce bude mít tvar

$$\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Na přímce leží bod $(-3, 0)^T$, ten tedy musí být v afinní projekci samodružný. Tento bod se příslušnou maticí asociovaného homomorfismu zobrazí do bodu $\frac{1}{5} \cdot (-12, 6)^T$. Vektor posunutí afinní projekce musí tedy mít tvar

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix},$$

dostaneme tedy řešení

$$\pi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Pro nalezení všech samodružných bodů řešíme vektorovou rovnici

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{5} \left(\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hledáme tedy řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4-5 & -2 & 3 \\ -2 & 1-5 & 6 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 3 \\ -2 & -4 & 6 \end{array} \right)$$

Vidíme, že druhý řádek je dvojnásobkem prvního, samodružné body tedy leží na přímce $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \text{LO} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Není těžké ověřit, že se jedná o zadanou přímku (alternativně rovnou z prvního řádku matice vidíme, že rovnice přímky je $-x - 2y = 3$, což odpovídá zadané přímce).

Matice asociovaného homomorfismu je singulární, takže jedním z jejích vlastních čísel je 0. Tomu odpovídá samodružný směr $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (směr kolmý na zadanou přímku).

Z řešení soustavy výše si naopak lze všimnout, že 1 je také vlastním číslem, které odpovídá směru přímky $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Zadaná přímka je jedinou samodružnou přímkou. Příným výpočtem ověříme, že $\pi \circ \pi = \pi$.

2.8

- (a) Začneme výpočtem vlastních čísel a vektorů asociovaného homomorfismu. Z LA víme, že vlastní čísla jsou kořeny charakteristického polynomu

$$\frac{1}{3}((5-3\lambda)(7-3\lambda)-8) = \frac{1}{3}(9\lambda^2-36\lambda+27) = 3\lambda^2-12\lambda+9 = 3(\lambda-1)(\lambda-3)$$

Vlastní čísla jsou 1 a 3. Příslušné vlastní vektory postupně jsou:

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{3}-1 & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{3}-3 & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3}-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Při hledání samodružných bodů dospějeme obdobně jako v 2.7 k soustavě

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5-3 & 4 & 8 \\ 2 & 7-3 & 8 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 8 \end{array} \right),$$

takže samodružné body tvoří přímku $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{LO} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Protože samodružná přímka má směr příslušný vlastnímu číslu 1 a existuje další vlastní směr s nenulovým vlastním číslem, jedná se o osovou afinitu. Její osou je tato samodružná přímka, charakteristika je 3 a směr afinity je $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Směr afinity není směrem osy, takže tato afinita není elace.

- (b) Vlastní čísla jsou kořeny polynomu $-\lambda(2-\lambda)+1 = \lambda^2-2\lambda+1 = (\lambda-1)^2$.

Vlastní číslo je tedy jediné a je rovno 1. Protože $\begin{pmatrix} 0-1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, je jeho příslušným vlastním vektorem $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Pro nalezení samodružných bodů řešíme

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & -4 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Samodružné body tvoří přímkou $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{LO} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Jedná se tedy o osovu afinitu podle této přímky. Protože má jediný samodružný směr, jedná se dokonce o elaci.

$$\mathbf{2.9} \quad \frac{AT}{TB} = 2, \quad \frac{TA}{AB} = -\frac{2}{3}, \quad \frac{ST}{TB} = \frac{1}{2}, \quad S = \frac{1}{4}A + \frac{3}{4}T$$

2.10

Označme a, b, c barycentrické souřadnice bodu $\mathbf{X}$ v afinní bázi $(\mathbf{ABC})$. Pro přehlednost budeme vůči afinní bázi $(\mathbf{ABC})$ značením $\mathbf{Y} = (x, y, z)$ myslet, že bod $\mathbf{Y}$ má barycentrické souřadnice x, y, z až na násobek, tj. že platí

$$\mathbf{Y} = \frac{x}{x+y+z} \cdot \mathbf{A} + \frac{y}{x+y+z} \cdot \mathbf{B} + \frac{z}{x+y+z} \cdot \mathbf{C}.$$

Snadno určíme, že

$$\mathbf{P} = (0, b, c), \quad \mathbf{Q} = (a, 0, c), \quad \mathbf{R} = (a, b, 0),$$

proto

$$\frac{\mathbf{AX}}{\mathbf{XP}} = \frac{b+c}{a}, \quad \frac{\mathbf{AR}}{\mathbf{RB}} = \frac{b}{a}, \quad \frac{\mathbf{AQ}}{\mathbf{QC}} = \frac{c}{a},$$

takže

$$\frac{\mathbf{AX}}{\mathbf{XP}} = \frac{b+c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{\mathbf{AR}}{\mathbf{RB}} + \frac{\mathbf{AQ}}{\mathbf{QC}},$$

což jsme měli dokázat.