1 Afinní prostory

Úloha 1.1. (Z) V aritmetickém afinním prostoru $A = V = \mathbb{R}^2$ uvažujme dvě posloupnosti

$$S = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad R = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

(a) Ověřte, že se jedná o afinní soustavy souřadnic tohoto prostoru.

(b) Spočítejte souřadnice bodu $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické souřadné soustavě K a vzhledem k soustavě souřadnic S, tedy nalezněte $[B]_K$ a $[B]_S$.

(c) Najděte bod $\mathbf{C}$, pro který $[\mathbf{C}]_S = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(d) Pro bod $\mathbf{A}$ najděte $[\mathbf{A}]_S$, jestliže $[\mathbf{A}]_R = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(e) Obecněji, pro bod $\mathbf{A}$ afinního prostoru najděte $[\mathbf{A}]_S = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, jestliže $[\mathbf{A}]_R = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

(f) Užitím souřadnic S vypočtěte afinní kombinaci bodů $2A + 2B - 3C$ a ověřte, že odpovídající výsledek dostaneme i soustavě R. Také ověřte, že pro kombinaci $2A + 2B - 2C$ si výsledky odpovídat nebudou.

Úloha 1.2. (Z) Ověřením axiomů s využitím poznatků z LA ukažte, že množina

$$A = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 6\} \subset \mathbb{R}^3$$

je afinním prostorem se zaměřením

$$V = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\} < \mathbb{R}^3.$$

a) Ověřte, že posloupnost $R = ((1, 1, 1)^T, (-2, 1, 0)^T, (-3, 0, 1)^T)$ tvoří afinní soustavu souřadnic.

b) Nalezněte body $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$ tak, aby $[\mathbf{B}_1]_R = (0, 0)^T$, $[\mathbf{B}_2]_R = (1, 0)^T$ a $[\mathbf{B}_3]_R = (0, 1)^T$.

c) Nalezněte souřadnice $[\mathbf{X}]_R$ pro $\mathbf{X} = (0, 3, 0)^T \in A$.

d) Vyjádřete $\mathbf{X}$ jako afinní kombinaci $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ a $\mathbf{B}_3$.

e) Dokažte, že lineární kombinace $c_1\mathbf{B}_1 + c_2\mathbf{B}_2 + c_3\mathbf{B}_3$ leží v A právě tehdy když $c_1 + c_2 + c_3 = 1$.

Úloha 1.3. (Z) V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem uvažujme přímky $p = \begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix} + \mathrm{LO}\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\}$ a $q = \begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix} + \mathrm{LO}\{\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}\}$.

(a) Určete vzájemnou polohu přímek p a q,

(b) určete úhel přímek p a q,

(c) najděte přímku různoběžnou a zároveň kolmou k oběma přímkám p a q,

(d) spočítejte vzdálenost p a q.

Úloha 1.4. (Z) V afinním prostoru $\mathbb{Z}_5^4$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ s vektorovým prostorem $\mathbb{Z}_5^4$ uvažujme tři podprostory

$$D_1 = \mathrm{AO}\{\begin{pmatrix}2\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\2\\4\end{pmatrix}\},\ D_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \mathrm{LO}\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}\},\ D_3 = \{A \in \mathbb{Z}_5^4 |\ \begin{pmatrix}1&0&0&2\\3&0&0&2\end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\}.$$

(a) Najděte nějakou afinní soustavu souřadnic a nějakou barycentrickou soustavu souřadnic afinních prostorů D_1, D_2 a D_3.

(b) určete parametrické vyjádření podprostorů D_1 a D_3,

(c) určete rovnicové vyjádření podprostorů D_1 a D_2,

(d) určete podprostory D_2 a D_3 jako afinní kombinace bodů.

Úloha 1.5. (Z) V afinní rovině $\mathbb{Z}_5^2$ jsou dány body $\mathbf{A} = (2,3)^T$, $\mathbf{B} = (1,4)^T$. Nalezněte rovnoběžku s přímkou $\mathbf{AB}$, která prochází bodem $\mathbf{C} = (2,2)^T$ a popište ji parametricky, bodově i rovnicově.

Úloha 1.6. Uvažujme aritmetický afinní prostor $\mathbb{R}^4$ se zaměřením $\mathbb{R}^4$. Definujme jeho podprostory

$$D_1 = \mathrm{AO}\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\2\\4\\4\end{pmatrix}\},$$

kde a je pevné reálné číslo a D_2 je řešením soustavy (s jedinou rovnicí)

$$(2,3,4,1) \cdot x = 10.$$

Ukažte, že D_2 je nadrovina a určete hodnotu a tak, aby D_1 a D_2 byly rovnoběžné.

Úloha 1.7. Uvažujme aritmetický afinní prostor $\mathbb{R}^4$ se zaměřením $\mathbb{R}^4$. Definujme jeho podprostory

$$D_1 = \mathrm{AO}\{\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}\}$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} + \mathrm{LO}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}\}.$$

Pro oba podprostory určete jejich dimenzi a nalezněte jejich rovnicové vyjádření. Určete jejich vzájemnou polohu a v případě různoběžnosti i jejich průsečík.

Výsledky

1.1

(a) Stačí ověřit, že $M = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ a $N = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ tvoří báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$, což zjevně platí.

(b) Pro kanonickou soustavu souřadnic:

$$K = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow t = 0,\ s = 2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_K = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vzhledem k soustavě souřadnic S:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

(d) 1. způsob řešení - kombinace $(b) + (c)$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow [\mathbf{A}]_S = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. způsob řešení - věta 1.5:

$$[\mathbf{A}]_S = [Id]_M^N [\mathbf{A}]_R + \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_S$$

$$[Id]_M^N : \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow [Id]_M^N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]_S = \left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right]_M = \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$$
$$[\mathbf{A}]_S = \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$$

(e) Podle předchozího

$$[\mathbf{A}]_S = \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 0\end{pmatrix}[\mathbf{A}]_R + \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$$

což psáno po složkách je

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+2y\\2x-2\end{pmatrix}. \tag{1}$$

(f) Nejprve dopočítáme

$$[\mathbf{B}]_R = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}, \qquad [\mathbf{C}]_R = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{9}{4}\end{pmatrix}.$$

$X = 2A + 2B - 3C$ je dobře definovaná afinní kombinace a můžeme počítat

$$[X]_S = 2[A]_S + 2[B]_S - 3[C]_S = 2\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix}$$

$$[X]_R = 2[A]_R + 2[B]_R - 3[C]_R = 2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{3}{4}\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{9}{4}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{9}{2}\\\frac{3}{4}\end{pmatrix},$$

přičemž tyto dvoje souřadnice splňují vztah (1).

Kdybychom se něco podobného pokusili udělat pro $2A + 2B - 2C$ (což není definováno), dostali bychom

$$2[A]_S + 2[B]_S - 2[C]_S = 2\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix}$$

$$2[A]_R + 2[B]_R - 2[C]_R = 2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{3}{4}\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{9}{4}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix},$$

kteréžto dvoje "souřadnice"vztah (1) nesplňují.

1.2

(a) Posloupnost $\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ je báze zaměření V, takže se jedná o afinní soustavu souřadnic.

(b) $\mathbf{B_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B_2} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B_3} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$

(c) $\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -3 & 0-1 \\ 1 & 0 & 3-1 \\ 0 & 1 & 0-1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$, takže $[\mathbf{X}]_R = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

(d) Z (c) víme, že $\mathbf{X} = 0\mathbf{B_1} + 2\mathbf{B_2} - 1\mathbf{B_3}$. Protože se tyto koeficienty sečtou na 1, jedná se o hledanou afinní kombinaci.

(e) $\Longrightarrow$

$$c_1\mathbf{B_1} + c_2\mathbf{B_2} + c_3\mathbf{B_3} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1 - c_2 - 2c_3\\c_1 + 2c_2 + c_3\\c_1 + c_2 + 2c_3\end{pmatrix}$$

Předpokládáme, že $\begin{pmatrix}c_1 - c_2 - 2c_3\\c_1 + 2c_2 + c_3\\c_1 + c_2 + 2c_3\end{pmatrix} \in A$, takže

$$c_1 - c_2 - 2c_3 + 2(c_1 + 2c_2 + c_3) + 3(c_1 + c_2 + 2c_3) = 6$$

Po sečtení:

$$6c_1 + 6c_2 + 6c_3 = 6$$

z čehož plyne $c_1 + c_2 + c_3 = 1$.

$\Longleftarrow$ Využitím (b) a předpokladu $c_1 + c_2 + c_3 = 1$ máme:

$$c_1\mathbf{B_1} + c_2\mathbf{B_2} + c_3\mathbf{B_3} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_2\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right) + c_3\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right) =$$

$$= (c_1 + c_2 + c_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$$

Tedy platí $c_1\mathbf{B_1} + c_2\mathbf{B_2} + c_3\mathbf{B_3} \in \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = A$

1.3

(a) Afinní přímky p a q zřejmě nejsou rovnoběžné, stačí nám tedy například zjistit, zda existuje řešení rovnice

$$\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix},$$

což je ekvivalentní vektorové podmínce, zda $\begin{pmatrix}-1\\6\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix} \in \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Snadno spočítáme, že nehomogenní soustava $\left(\begin{array}{cc|c}1&4&-1\\2&-1&6\\1&1&-2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1&1&-2\\0&3&1\\0&-3&10\end{array}\right)$ nemá řešení, a proto jsou přímky p a q mimoběžné.

(b) Přímky svírají úhel φ, který je určen směry jejich zaměření $\mathbf{v}_P = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ a $\mathbf{v}_Q = \begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$:

$$\cos\varphi = \frac{|\mathbf{v}_P \cdot \mathbf{v}_Q|}{\|\mathbf{v}_P\| \cdot \|\mathbf{v}_Q\|} = \frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{18}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

(c) Nejprve spočítáme vektor kolmý k oběma vektorům $\mathbf{v}_P$ a $\mathbf{v}_Q$ a tím získáme zaměření hledané přímky. Snadno zjistíme (například vyřešením homogenní soustavy s maticí $\begin{pmatrix}1&2&1\\4&-1&1\end{pmatrix}$ tvořenou řádkovými vektory $\mathbf{v}_P^T$ a $\mathbf{v}_Q^T$), že hledaným zaměřením je podprostor $\mathrm{LO}\{\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}\}$. Nyní potřebujeme najít průsečíky hledané kolmé přímky s mimoběžkami p a q, což lze formulovat jako řešení rovnice

$$\left(\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right) - \left(\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}\right) = z\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}.$$

Ta vede na nehomogenní soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&4&1&-1\\-2&-1&1&6\\-1&1&-3&-2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-2\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{array}\right),$$

jejímž jediným řešením je $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$. Všimněme si, že podmínka $z = 1$ říká, že se jednalo o mimoběžky (zjevně nejsou rovnoběžné a to, že se protínají je ekvivalnetní podmínce $z = 0$). Tedy průsečík hledané kolmé příčky s přímkou p je právě bod

$\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ a průsečík s přímkou q je právě bod $\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$. Hledanou kolmou příčku můžeme zapsat ve tvaru $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}\right\}$.

(d) Výše jsme už našli průsečíky přímek p a q s kolmou příčkou, nejkratší vzdálenost přímek p a q je přitom rovna právě vzdálenosti těchto dvou průsečíků. Navíc z vektorové rovnice v úloze (c) vidíme, že tato vzdálenost je rovna právě velikosti vektoru $z\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$. Tedy vzdálenost přímek p a q je $\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{11}$.

1.4

(a) Barycentrickou soustavu vidíme hned ze zadání, $B_1 = \left(\begin{pmatrix}2\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\2\\4\end{pmatrix}\right)$.

Pro D_1 zvolíme jeden z bodů, např.: $\begin{pmatrix}2\\3\\2\\1\end{pmatrix}$, a zbylé vezmeme jako koncové body vektorů, které mají počáteční bod v námi zvoleném bodě, tzn.:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\3\\2\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}2\\2\\2\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\\3\end{pmatrix}.$$

Vektory jsou LN, tím pádem je můžeme považovat za bázi příslušného prostoru. Získáváme soustavu souřadnic $S_1 = \left(\begin{pmatrix}2\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\0\\3\end{pmatrix}\right)$

Pro D_2 vypadají souřadnice následovně:

$$S_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}\right) \quad \wedge \quad B_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\3\\2\end{pmatrix}\right).$$

Pro D_3 nejprve musíme nalézt jedno řešení nehomogenní soustavy a poté množinu všech řešení homogenní soustavy.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

je řešením nehomogenní soustavy. Báze řešení homogenní soustavy je: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soustavy vypadají následovně:

$$S_3 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \wedge \quad B_3 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(b) Pro získání parametrického vyjádření vyjdeme ze soustavy souřadnic S z cvičení (a).

Či-li $D_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + LO \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ a pro $D_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + LO \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(c) Lineární obal můžeme brát jako množinu všech řešení homogenní soustavy, tudíž hledáme matici, která splňuje dané řešení. Pro D_1:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Námi hledaná matice je $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Obecné vyjádření pomocí rovnice je ve tvaru $Ax = b$, dosazením bodu $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ získáváme pravou stranu. Rovnicové vyjádření D_1 vypadá následovně:

$$D_1 = \left\{ A \in \mathbb{Z}_5^{4|} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pro D_2 postupujeme obdobně, hledáme řešení homogenní soustavy, tentokrát s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Obdržíme tři vektory, které zapíšeme do řádků matice a následně

dopočítáme pravou stranu dosazením do $Ax = b$ za x bod $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. Rovnicový tvar pro D_2:

$$D_2 = \left\{ A \in \mathbb{Z}_5^4 | \begin{pmatrix}3&1&0&0\\3&0&1&0\\4&0&0&1\end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix} \right\}.$$

(d) Pro určení podprostorů jako afinní kombinace bodů využijeme barycentrické soustavy souřadnic, které jsme získali ve cvičení (a). Pro D_2 a D_3 platí, že

$$D_2 = AO\{B_2\} \quad \wedge \quad D_3 = AO\{B_3\}.$$

1.5 Parametricky například $:(2,2) + LO\{(4,1)^T\}$, bodově například $+AO\{(2,2),(1,3)^T\}$ rovnicově například: $x + y = 4$.

1.6 Nadrovina v $\mathbb{R}^4$ je podle definice libovolný podprostor dimenze 3, což množina řešení splňuje. Rovnoběžnost nastane pouze pro $a = -8$.

1.7

Oba mají dimenzi 2. Rovnicová vyjádření mají tvar

$$D_1 : \left(\begin{array}{cccc|c} 0&-1&1&0&10\\2&-1&0&1&14\end{array}\right), \quad D_2 : \left(\begin{array}{cccc|c} -1&3&4&0&-1\\3&-1&0&1&24\end{array}\right), \quad \text{průsečík: } \begin{pmatrix}10\\-\frac{31}{7}\\\frac{39}{7}\\-\frac{73}{7}\end{pmatrix}$$