Matematika pro fyziky II

Milan Pokorný

Přednáška 19.4.2023

Opakování I

Definice (12 Konvergence na $C^\infty(\Omega)$ D 23.8.1)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset C^\infty(\Omega)$. Jestliže pro každý multiindex $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ platí

$$D^\alpha \varphi_k \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} 0 \qquad \text{na } \Omega,$$

pak píšeme $\varphi_k \overset{C^\infty(\Omega)}{\longrightarrow} 0$. Dále zavádíme

$$\varphi_k \overset{C^\infty(\Omega)}{\longrightarrow} \varphi \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad \varphi_k - \varphi \overset{C^\infty(\Omega)}{\longrightarrow} 0.$$

Věta (7 O rozšíření distribuce s kompaktním nosičem V 23.8.3)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribuce. Pak T má kompaktní nosič právě tehdy, když existuje jednoznačné spojité lineární rozšíření distribuce T na $C^\infty(\Omega)$.

Důsledek (2 Důsl. 23.8.5)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribuce. Jestliže T má kompaktní nosič, pak má konečný řád.

Opakování I

Definice (12 Konvergence na $C^\infty(\Omega)$ D 23.8.1)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset C^\infty(\Omega)$. Jestliže pro každý multiindex $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ platí

$$D^\alpha \varphi_k \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} 0 \qquad \text{na } \Omega,$$

pak píšeme $\varphi_k \overset{C^\infty(\Omega)}{\to} 0$. Dále zavádíme

$$\varphi_k \overset{C^\infty(\Omega)}{\to} \varphi \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad \varphi_k - \varphi \overset{C^\infty(\Omega)}{\to} 0.$$

Věta (7 O rozšíření distribuce s kompaktním nosičem V 23.8.3)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribuce. Pak T má kompaktní nosič právě tehdy, když existuje jednoznačné spojité lineární rozšíření distribuce T na $C^\infty(\Omega)$.

Důsledek (2 Důsl. 23.8.5)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribuce. Jestliže T má kompaktní nosič, pak má konečný řád.

Opakování I

Definice (12 Konvergence na $C^\infty(\Omega)$ D 23.8.1)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset C^\infty(\Omega)$. Jestliže pro každý multiindex $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ platí

$$D^\alpha \varphi_k \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} 0 \qquad \text{na } \Omega,$$

pak píšeme $\varphi_k \overset{C^\infty(\Omega)}{\longrightarrow} 0$. Dále zavádíme

$$\varphi_k \overset{C^\infty(\Omega)}{\longrightarrow} \varphi \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad \varphi_k - \varphi \overset{C^\infty(\Omega)}{\longrightarrow} 0.$$

Věta (7 O rozšíření distribuce s kompaktním nosičem V 23.8.3)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribuce. Pak T má kompaktní nosič právě tehdy, když existuje jednoznačné spojité lineární rozšíření distribuce T na $C^\infty(\Omega)$.

Důsledek (2 Důsl. 23.8.5)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribuce. Jestliže T má kompaktní nosič, pak má konečný řád.

22.8 Distribuce s kompaktním nosičem I

Věta (8 O vlastnostech distribuce s jednobodovým nosičem V 23.8.6)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina, $x \in \Omega$ a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribuce splňující supp $T = \{x\}$. *Pak T má konečný řád $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a jednoznačně lze psát*

$$T = \sum_{\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N, |\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha \delta_x,$$

kde $\{c_\alpha\}$ jsou reálné (nebo komplexní) koeficienty a pro alespoň jeden multiindex α s vlastností $|\alpha| = m$ platí $c_\alpha \neq 0$.

Definice (13 Funkce x_+^λ D 23.9.1)

Pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ značíme

$$x_+^\lambda := \begin{cases} x^\lambda & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

Definice (14 Holomorfní parametrický systém distribucí, izolovaná singularita parametrického systému distribucí, reziduum parametrického systému distribucí D 23.9.2)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina, $G \subset \mathbb{C}$ je oblast a $\{H_\lambda\}_{\lambda \in G} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ je parametrický systém distribucí. Řekneme, že parametrický systém distribucí $\{H_\lambda\}_{\lambda \in G}$ *holomorfně závisí* na $\lambda \in G$, jestliže funkce $\lambda \mapsto \langle H_\lambda, \varphi \rangle$ je holomorfní na G pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Řekneme, že parametrický systém distribucí $\{H_\lambda\}_{\lambda \in G}$ má v bodě $\lambda_0 \in G$ *izolovanou singularitu*, jestliže má funkce $\lambda \mapsto \langle H_\lambda, \varphi \rangle$ izolovanou singularitu v bodě λ_0 pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Řekneme, že distribuce $H \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je *reziduem* parametrického systému distribucí $\{H_\lambda\}_{\lambda \in G}$ v bodě $\lambda_0 \in G$, jestliže

$$\langle H, \varphi \rangle = \operatorname{Res}_{\lambda_0} \langle H_\lambda, \varphi \rangle \qquad \text{pro každé } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

V takovém případě distribuci H značíme $\operatorname{Res}_{\lambda_0} H_\lambda$.

22.9.1 Distribuce $H_{x_+^\lambda}$ a $H_{x_-^\lambda}$ III

Definice (15 Parametrické systémy distribucí $\{H_{x_+^\lambda}\}$ a $\{H_{x_-^\lambda}\}$ D 23.9.4)

Nechť $k \in \mathbb{N}$. Pak na množině $G_k := \{\lambda \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}\lambda > -k, -\lambda \notin \mathbb{N}\}$ definujeme parametrické systémy distribucí $\{H_{x_+^\lambda}\}_{G_k}$ a $\{H_{x_-^\lambda}\}_{G_k}$ pomocí předpisů

$$H_{x_+^\lambda} := \frac{D^k T_{x_+^{\lambda+k}}}{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+k)}$$

a

$$\langle H_{x_-^\lambda}, \varphi \rangle = \langle H_{x_+^\lambda}, \varphi(-x) \rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

22.9.1 Distribuce $H_{x_+^\lambda}$ a $H_{x_-^\lambda}$ IV

Věta (9 O vlastnostech distribucí $H_{x_+^\lambda}$ a $H_{x_-^\lambda}$ V 23.9.5)

(i) *Distribuce* $H_{x_+^\lambda}$ *a* $H_{x_-^\lambda}$ *jsou definované pro všechna* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-n\colon n \in \mathbb{N}\}$ *a platí*

$$xH_{x_+^\lambda} = H_{x_+^{\lambda+1}} \qquad a \qquad -xH_{x_-^\lambda} = H_{x_-^{\lambda+1}}.$$

(ii) *Platí* $H_{x_+^0} = T_{x_+^0} = T_H$ *(H je Heavisideova funkce).*
(iii) *Pro všechna* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-n\colon n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ *platí*

$$DH_{x_+^\lambda} = \lambda H_{x_+^{\lambda-1}} \qquad\qquad DH_{x_-^\lambda} = -\lambda H_{x_-^{\lambda-1}}.$$

(iv) *Pro všechna* $k \in \mathbb{N}$ *mají parametrické systémy distribucí* $\{H_{x_+^\lambda}\}_{\mathbb{C}\setminus\{-n\colon n\in\mathbb{N}\}}$ *a* $\{H_{x_-^\lambda}\}_{\mathbb{C}\setminus\{-n\colon n\in\mathbb{N}\}}$ *izolovanou singularitu v bodě* $-k$*. Navíc*

$$\operatorname{Res}_{-k} H_{x_+^\lambda} = (-1)^{k-1}\frac{D^{k-1}\delta_0}{(k-1)!} \qquad a \qquad \operatorname{Res}_{-k} H_{x_-^\lambda} = \frac{D^{k-1}\delta_0}{(k-1)!}.$$

22.9.2 Normalizace distribucí $H_{x_+^\lambda}$ a $H_{x_-^\lambda}$ I

Věta (10 O normalizaci distribucí $H_{x_+^\lambda}$ a $H_{x_-^\lambda}$ V 23.9.7)

Pro každé $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-n \colon n \in \mathbb{N}\}$ *definujme distribuce*

$$H_{\chi_+^\lambda} := \frac{H_{x_+^\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)} \qquad a \qquad H_{\chi_-^\lambda} := \frac{H_{x_-^\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)}.$$

Pak lze uvedené parametrické systémy holomorfně rozšířit na $\mathbb{C}$*. Po tomto rozšíření platí pro všechna* $k \in \mathbb{N}$

$$H_{\chi_+^{-k}} = D^{k-1}\delta_0 \qquad a \qquad H_{\chi_-^{-k}} = (-1)^{k-1} D^{k-1}\delta_0.$$

Navíc pro všechna $\lambda \in \mathbb{C}$ *máme*

$$DH_{\chi_+^\lambda} = H_{\chi_+^{\lambda-1}} \qquad a \qquad DH_{\chi_-^\lambda} = -H_{\chi_-^{\lambda-1}}.$$

22.9.3 Distribuce $H_{|x|^\lambda}$, $H_{|x|^\lambda \operatorname{sign} x}$ a $H_{(x+\mathrm{i}0)^\lambda}$ a $H_{(x-\mathrm{i}0)^\lambda}$ I

Definice (16 Parametrické systémy distribucí $\{H_{|x|^\lambda}\}$ a $\{H_{|x|^\lambda \operatorname{sign} x}\}$ D 23.9.8)

Pro všechna $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-n \colon n \in \mathbb{N}\}$ definujme distribuce

$$H_{|x|^\lambda} := H_{x_+^\lambda} + H_{x_-^\lambda} \qquad \text{a} \qquad H_{|x|^\lambda \operatorname{sign} x} := H_{x_+^\lambda} - H_{x_-^\lambda}.$$

Dále pro každé $m \in \mathbb{N}$ definujeme (ve smyslu slabé* konvergence distribucí)

$$H_{x^{-2m}} := \lim_{\lambda \to -2m} H_{|x|^\lambda} \qquad \text{a} \qquad H_{x^{-2m+1}} := \lim_{\lambda \to -2m+1} H_{|x|^\lambda \operatorname{sign} x}.$$

Definice (17 Parametrické systémy distribucí $\{H_{(x\pm\mathrm{i}0)^\lambda}\}$ D 23.9.10)

Pro všechna $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-n \colon n \in \mathbb{N}\}$ položme

$$H_{(x+\mathrm{i}0)^\lambda} := H_{x_+^\lambda} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\pi} H_{x_-^\lambda} \qquad \text{a} \qquad H_{(x-\mathrm{i}0)^\lambda} := H_{x_+^\lambda} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\pi} H_{x_-^\lambda}.$$

Definice (16 Parametrické systémy distribucí $\{H_{|x|^\lambda}\}$ a $\{H_{|x|^\lambda \operatorname{sign} x}\}$ D 23.9.8)

Pro všechna $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-n\colon n \in \mathbb{N}\}$ definujme distribuce

$$H_{|x|^\lambda} := H_{x_+^\lambda} + H_{x_-^\lambda} \qquad \text{a} \qquad H_{|x|^\lambda \operatorname{sign} x} := H_{x_+^\lambda} - H_{x_-^\lambda}\,.$$

Dále pro každé $m \in \mathbb{N}$ definujeme (ve smyslu slabé* konvergence distribucí)

$$H_{x^{-2m}} := \lim_{\lambda \to -2m} H_{|x|^\lambda} \qquad \text{a} \qquad H_{x^{-2m+1}} := \lim_{\lambda \to -2m+1} H_{|x|^\lambda \operatorname{sign} x}.$$

Definice (17 Parametrické systémy distribucí $\{H_{(x\pm\mathrm{i}0)^\lambda}\}$ D 23.9.10)

Pro všechna $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-n\colon n \in \mathbb{N}\}$ položme

$$H_{(x+\mathrm{i}0)^\lambda} := H_{x_+^\lambda} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\pi} H_{x_-^\lambda} \qquad \text{a} \qquad H_{(x-\mathrm{i}0)^\lambda} := H_{x_+^\lambda} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\pi} H_{x_-^\lambda}\,.$$

22.9.3 Distribuce $H_{|x|^\lambda}$, $H_{|x|^\lambda \operatorname{sign} x}$ a $H_{(x+\mathrm{i}0)^\lambda}$ a $H_{(x-\mathrm{i}0)^\lambda}$ II

Tvrzení (4 T 23.9.11)

Pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ existuje limita níže na levé straně (a definuje tudíž novou distribuci uvedenou na pravé straně rovnosti)

$$\lim_{\lambda \to -k} \left(H_{x_+^\lambda} + \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\lambda\pi} H_{x_-^\lambda} \right) =: H_{(x \pm \mathrm{i}0)^{-k}}.$$