Matematika pro fyziky II

Milan Pokorný

Přednáška 29.3.2023

Definice (1 Schwartzův prostor D 21.1.3)

Nechť $N \in \mathbb{N}$. Pak *Schwartzův prostor* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ je množina všech funkcí $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, které splňují

$$\|f\|_{\alpha,\beta} := \|x^\alpha D^\beta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \infty \qquad \text{pro všechna } \alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N. \tag{1}$$

Definice (4 Fourierova transformace na Schwartzově prostoru D 21.2.1)

Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Pak (*přímou*) *Fourierovou transformací* funkce f nazýváme funkci $\xi \in \mathbb{R}^N \mapsto \mathcal{F}(f)(\xi)$ zadanou předpisem

$$\mathcal{F}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)} \,\mathrm{d}x$$

a *inverzní (zpětnou) Fourierovou transformací* funkce f nazýváme funkci $\xi \in \mathbb{R}^N \mapsto \mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)$ zadanou předpisem

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(x,\xi)} \,\mathrm{d}x.$$

Lemma (1 O základních vztazích pro Fourierovu transformaci L 21.2.4)

Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Pak platí (od druhé do čtvrté části je integrační proměnnou x)

(i) $\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = \mathcal{F}(f)(-\xi)$, $\overline{\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)} = \mathcal{F}(\bar{f})(\xi)$, $\mathcal{F}^{-1}(\bar{f})(\xi) = \overline{\mathcal{F}(f)(\xi)}$

(ii) $\mathcal{F}(f(x-z))(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(z,\xi)}\mathcal{F}(f(x))(\xi)$ *pro všechna* $z \in \mathbb{R}^N$

(iii) $\mathcal{F}(f(x))(\xi - \eta) = \mathcal{F}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(x,\eta)} f(x))(\xi)$ *pro všechna* $\eta \in \mathbb{R}^N$

(iv) $\mathcal{F}(f(\varepsilon x))(\xi) = |\varepsilon|^{-N}\mathcal{F}(f(x))(\frac{\xi}{\varepsilon})$ *pro všechna* $\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

20.2 Opakování II

Definice (4 Fourierova transformace na Schwartzově prostoru D 21.2.1)

Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Pak (*přímou*) *Fourierovou transformací* funkce f nazýváme funkci $\xi \in \mathbb{R}^N \mapsto \mathcal{F}(f)(\xi)$ zadanou předpisem

$$\mathcal{F}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)}\,\mathrm{d}x$$

a *inverzní (zpětnou) Fourierovou transformací* funkce f nazýváme funkci $\xi \in \mathbb{R}^N \mapsto \mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)$ zadanou předpisem

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(x,\xi)}\,\mathrm{d}x.$$

Lemma (1 O základních vztazích pro Fourierovu transformaci L 21.2.4)

Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Pak platí (od druhé do čtvrté části je integrační proměnnou x)

(i) $\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = \mathcal{F}(f)(-\xi)$, $\overline{\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)} = \mathcal{F}(\bar{f})(\xi)$, $\mathcal{F}^{-1}(\bar{f})(\xi) = \overline{\mathcal{F}(f)(\xi)}$

(ii) $\mathcal{F}(f(x-z))(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(z,\xi)}\mathcal{F}(f(x))(\xi)$ *pro všechna* $z \in \mathbb{R}^N$

(iii) $\mathcal{F}(f(x))(\xi-\eta) = \mathcal{F}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(x,\eta)}f(x))(\xi)$ *pro všechna* $\eta \in \mathbb{R}^N$

(iv) $\mathcal{F}(f(\varepsilon x))(\xi) = |\varepsilon|^{-N}\mathcal{F}(f(x))(\frac{\xi}{\varepsilon})$ *pro všechna* $\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Opakování III

Lemma (2 O zachování parity při Fourierově transformaci L 21.2.7)

Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ a $j \in \{1, \ldots, N\}$. Je-li f sudá v proměnné x_j, pak je $\mathcal{F}(f)$ sudá v proměnné ξ_j. Analogicky pro lichost v proměnné x_j. Speciálně v případě $N = 1$ máme

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \begin{cases} 2\int_0^\infty \cos(2\pi x\xi) f(x)\,\mathrm{d}x & \textit{pro } f \textit{ sudou} \\ -2\mathrm{i}\int_0^\infty \sin(2\pi x\xi) f(x)\,\mathrm{d}x & \textit{pro } f \textit{ lichou.} \end{cases}$$

Lemma (3 O zachování radiální symetrie při Fourierově transformaci L 21.2.8)

Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ je radiálně symetrická. Pak i $\mathcal{F}(f)$ je radiálně symetrická. Speciálně v případě $N = 3$ při zápisu $f(x) = g(|x|)$ máme pro každé $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{2}{|\xi|} \int_0^\infty g(\varrho)\varrho \sin(2\pi\varrho|\xi|)\,\mathrm{d}\varrho.$$

Opakování III

Lemma (2 O zachování parity při Fourierově transformaci L 21.2.7)

Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ a $j \in \{1, \dots, N\}$. Je-li f sudá v proměnné x_j, pak je $\mathcal{F}(f)$ sudá v proměnné ξ_j. Analogicky pro lichost v proměnné x_j. Speciálně v případě $N = 1$ máme

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \begin{cases} 2\int_0^\infty \cos(2\pi x\xi) f(x)\,\mathrm{d}x & \text{pro } f \text{ sudou} \\ -2\mathrm{i}\int_0^\infty \sin(2\pi x\xi) f(x)\,\mathrm{d}x & \text{pro } f \text{ lichou.} \end{cases}$$

Lemma (3 O zachování radiální symetrie při Fourierově transformaci L 21.2.8)

Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ je radiálně symetrická. Pak i $\mathcal{F}(f)$ je radiálně symetrická. Speciálně v případě $N = 3$ při zápisu $f(x) = g(|x|)$ máme pro každé $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{2}{|\xi|}\int_0^\infty g(\varrho)\varrho \sin(2\pi\varrho|\xi|)\,\mathrm{d}\varrho.$$

Opakování IV

Věta (3 O základních vlastnostech Fourierovy transformace V 21.2.10)

Nechť $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *a* $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$. *Pak platí*

(i) $\mathcal{F}(D^\alpha f)(\xi) = (\mathrm{i}2\pi\xi)^\alpha \mathcal{F}(f)(\xi)$, $\mathcal{F}^{-1}(D^\alpha f)(\xi) = (-\mathrm{i}2\pi\xi)^\alpha \mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)$

(ii) $D^\alpha(\mathcal{F}(f)(\xi)) = \mathcal{F}((-\mathrm{i}2\pi x)^\alpha f(x))(\xi)$,
$D^\alpha(\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)) = \mathcal{F}^{-1}((\mathrm{i}2\pi x)^\alpha f(x))(\xi)$

(iii) $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} |\mathcal{F}(f)(\xi)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$, $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} |\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$

(iv) $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{F}^{-1}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

(v) $\int_{\mathbb{R}^N} f\mathcal{F}(g)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(f)g\,\mathrm{d}x$, $\int_{\mathbb{R}^N} f\mathcal{F}^{-1}(g)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}^{-1}(f)g\,\mathrm{d}x$

(vi) $\mathcal{F}(f \star g)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi)\mathcal{F}(g)(\xi)$, $\mathcal{F}^{-1}(f \star g)(\xi) = \mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)\mathcal{F}^{-1}(g)(\xi)$.

Věta (4 Schwartzova věta V 21.2.14)

Fourierova transformace je na prostoru $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *prostá, zobrazuje* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *na* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *a inverzním zobrazením k Fourierově transformaci je na* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *inverzní Fourierova transformace.*

Opakování IV

Věta (3 O základních vlastnostech Fourierovy transformace V 21.2.10)

Nechť $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ a $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$. Pak platí
(i) $\mathcal{F}(D^\alpha f)(\xi) = (\mathrm{i}2\pi\xi)^\alpha \mathcal{F}(f)(\xi)$, $\mathcal{F}^{-1}(D^\alpha f)(\xi) = (-\mathrm{i}2\pi\xi)^\alpha \mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)$
(ii) $D^\alpha(\mathcal{F}(f)(\xi)) = \mathcal{F}((-\mathrm{i}2\pi x)^\alpha f(x))(\xi)$,
$D^\alpha(\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)) = \mathcal{F}^{-1}((\mathrm{i}2\pi x)^\alpha f(x))(\xi)$
(iii) $\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N} |\mathcal{F}(f)(\xi)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$, $\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N} |\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$
(iv) $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{F}^{-1}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$
(v) $\int_{\mathbb{R}^N} f\mathcal{F}(g)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(f)g\,\mathrm{d}x$, $\int_{\mathbb{R}^N} f\mathcal{F}^{-1}(g)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}^{-1}(f)g\,\mathrm{d}x$
(vi) $\mathcal{F}(f \star g)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi)\mathcal{F}(g)(\xi)$, $\mathcal{F}^{-1}(f \star g)(\xi) = \mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)\mathcal{F}^{-1}(g)(\xi)$.

Věta (4 Schwartzova věta V 21.2.14)

Fourierova transformace je na prostoru $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ prostá, zobrazuje $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ a inverzním zobrazením k Fourierově transformaci je na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ inverzní Fourierova transformace.

Věta (5 O vlastnostech Fourierovy transformace na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ V 21.2.16)

Nechť $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$*. Pak*
(i) $\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f) \star \mathcal{F}(g)$ *a* $\mathcal{F}^{-1}(fg) = \mathcal{F}^{-1}(f) \star \mathcal{F}^{-1}(g)$
(ii) $\int_{\mathbb{R}^N} f\overline{g}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(f)\overline{\mathcal{F}(g)}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}^{-1}(f)\overline{\mathcal{F}^{-1}(g)}\,\mathrm{d}x$*, speciálně pro* $f = g$

platí $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\mathcal{F}^{-1}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$.

Věta (6 O vlastnostech Fourierovy transformace na $L^1(\mathbb{R}^N)$ V 21.3.4)

Zobrazení $\mathcal{F}$ a $\mathcal{F}^{-1}$ jsou spojitá lineární zobrazení z $L^1(\mathbb{R}^N)$ do $C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ a pro každou funkci $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ platí
(i) $\|\mathcal{F}(f)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$, $\|\mathcal{F}^{-1}(f)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$
(ii) $\lim_{|\xi|\to+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) = \lim_{|\xi|\to+\infty} \mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = 0$
(iii) $\mathcal{F}(f)$ *a* $\mathcal{F}^{-1}(f)$ *jsou stejnoměrně spojité na* $\mathbb{R}^N$.

Lemma (4 L 21.3.5)

Nechť $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ a pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ platí

$$\int_{\mathbb{R}^N} f\varphi \,\mathrm{d}x = 0.$$

Pak $f = 0$ skoro všude na $\mathbb{R}^N$.

20.3 Fourierova transformace na $L^1(\mathbb{R}^N)$ I

Věta (6 O vlastnostech Fourierovy transformace na $L^1(\mathbb{R}^N)$ V 21.3.4)

Zobrazení $\mathcal{F}$ a $\mathcal{F}^{-1}$ jsou spojitá lineární zobrazení z $L^1(\mathbb{R}^N)$ do $C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ a pro každou funkci $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ platí
(i) $\|\mathcal{F}(f)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$, $\|\mathcal{F}^{-1}(f)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$
(ii) $\lim_{|\xi|\to+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) = \lim_{|\xi|\to+\infty} \mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = 0$
(iii) $\mathcal{F}(f)$ *a* $\mathcal{F}^{-1}(f)$ *jsou stejnoměrně spojité na* $\mathbb{R}^N$.

Lemma (4 L 21.3.5)

Nechť $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ a pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ platí

$$\int_{\mathbb{R}^N} f\varphi \, \mathrm{dx} = 0.$$

Pak $f = 0$ skoro všude na $\mathbb{R}^N$.

20.3 Fourierova transformace na $L^1(\mathbb{R}^N)$ III

Věta (7 O inverzi na $L^1(\mathbb{R}^N)$ V 21.3.6)

Nechť $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ a $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Pak $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f$ skoro všude na $\mathbb{R}^N$. Speciálně pokud $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ a $\mathcal{F}(f) \equiv 0$ na $\mathbb{R}^N$, pak $f = 0$ skoro všude na $\mathbb{R}^N$.

Věta (8 O bodové rovnosti pro Fourierovu transformaci V 21.3.7)

Nechť $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$ a platí
(i) *existují vlastní limity $f(x_0+)$ a $f(x_0-)$*
(ii) *existují taková čísla $\alpha \in (0,1]$ a $\delta, M > 0$, že*

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0+)| &\leq M|x - x_0|^\alpha \qquad \text{pro } x \in (x_0, x_0 + \delta) \\ |f(x) - f(x_0-)| &\leq M|x - x_0|^\alpha \qquad \text{pro } x \in (x_0 - \delta, x_0). \end{aligned}$$

Pak

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0+) + f(x_0-))$$

s konvencí, že integrál v definici $\mathcal{F}^{-1}$ chápeme jako

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \, d\xi := \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \ldots \, d\xi.$$

20.3 Fourierova transformace na $L^1(\mathbb{R}^N)$ III

Věta (7 O inverzi na $L^1(\mathbb{R}^N)$ V 21.3.6)

Nechť $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ a $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Pak $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f$ skoro všude na $\mathbb{R}^N$. Speciálně pokud $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ a $\mathcal{F}(f) \equiv 0$ na $\mathbb{R}^N$, pak $f = 0$ skoro všude na $\mathbb{R}^N$.

Věta (8 O bodové rovnosti pro Fourierovu transformaci V 21.3.7)

Nechť $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$ a platí
(i) existují vlastní limity $f(x_0+)$ a $f(x_0-)$
(ii) existují taková čísla $\alpha \in (0,1]$ a $\delta, M > 0$, že

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0+)| &\leq M|x - x_0|^\alpha \qquad \text{pro } x \in (x_0, x_0 + \delta)\\
|f(x) - f(x_0-)| &\leq M|x - x_0|^\alpha \qquad \text{pro } x \in (x_0 - \delta, x_0).
\end{aligned}
$$

Pak

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0+) + f(x_0-))$$

s konvencí, že integrál v definici $\mathcal{F}^{-1}$ chápeme jako

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \, d\xi := \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \dots \, d\xi.$$

20.4 Fourierova transformace na $L^2(\mathbb{R}^N)$ I

Definice (5 Fourierova transformace na $L^2(\mathbb{R}^N)$ D 21.4.1)

Nechť $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Pak Fourierovu transformaci funkce f definujeme jako

$$\mathcal{F}(f) := \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(f_n) \quad \text{v } L^2(\mathbb{R}^N),$$

kde $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ je libovolná posloupnost splňující $f_n \to f$ v $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Věta (9 O kompatibilitě definic Fourierovy transformace V 21.4.2)

Nechť funkce $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$. Pak definice Fourierovy transformace pro prostor $L^1(\mathbb{R}^N)$ a pro prostor $L^2(\mathbb{R}^N)$ dávají stejnou funkci.

Definice (5 Fourierova transformace na $L^2(\mathbb{R}^N)$ D 21.4.1)

Nechť $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Pak Fourierovu transformaci funkce f definujeme jako

$$\mathcal{F}(f) := \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(f_n) \quad \text{v } L^2(\mathbb{R}^N),$$

kde $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ je libovolná posloupnost splňující $f_n \to f$ v $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Věta (9 O kompatibilitě definic Fourierovy transformace V 21.4.2)

Nechť funkce $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$. Pak definice Fourierovy transformace pro prostor $L^1(\mathbb{R}^N)$ a pro prostor $L^2(\mathbb{R}^N)$ dávají stejnou funkci.

20.4 Fourierova transformace na $L^2(\mathbb{R}^N)$ II

Věta (10 O vlastnostech Fourierovy transformace na $L^2(\mathbb{R}^N)$ V 21.4.4)

Přímá i inverzní Fourierova transformace jsou prostá spojitá lineární zobrazení prostoru $L^2(\mathbb{R}^N)$ na $L^2(\mathbb{R}^N)$, která jsou navzájem inverzní. Tato zobrazení navíc zachovávají skalární součin, speciálně platí Plancherelova rovnost

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\mathcal{F}^{-1}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Důsledek (1 Důsl. 21.4.5)

Nechť $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, pak (následující rovnost chápeme ve smyslu rovnosti na $L^2(\mathbb{R}^N)$)

$$\mathcal{F}(f) = \lim_{R\to\infty} \int_{B_R(0)} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)} \,\mathrm{d}x.$$

Věta (10 O vlastnostech Fourierovy transformace na $L^2(\mathbb{R}^N)$ V 21.4.4)

Přímá i inverzní Fourierova transformace jsou prostá spojitá lineární zobrazení prostoru $L^2(\mathbb{R}^N)$ na $L^2(\mathbb{R}^N)$, která jsou navzájem inverzní. Tato zobrazení navíc zachovávají skalární součin, speciálně platí Plancherelova rovnost

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\mathcal{F}^{-1}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Důsledek (1 Důsl. 21.4.5)

Nechť $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, pak (následující rovnost chápeme ve smyslu rovnosti na $L^2(\mathbb{R}^N)$)

$$\mathcal{F}(f) = \lim_{R\to\infty} \int_{B_R(0)} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)}\,\mathrm{d}x.$$